



MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS
UFR O

**INTRODUCCION A LAS
VARIETADES ABELIANAS
Y
GRUPOS KLEINIANOS**

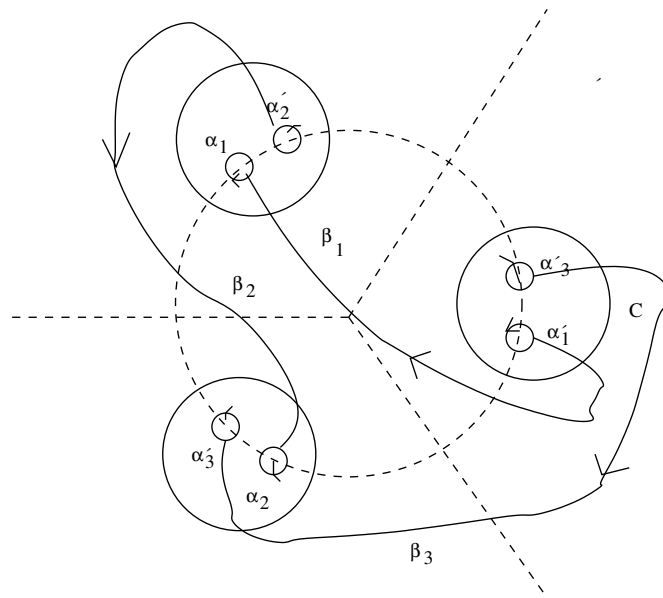
Rubén A. Hidalgo

Rubí E. Rodríguez

Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de La Frontera

Rubí E. Rodríguez (Parte 1)

Rubén A. Hidalgo (Parte 2)



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA, UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA, TEMUCO, CHILE

E-mail address: rubi.rodriguez@ufrontera.cl

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA, UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA, TEMUCO, CHILE

E-mail address: ruben.hidalgo@ufrontera.cl

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 14XXX, 30F40, 30F60, 32XXX;
Secondary XXX, XXX

Key words and phrases. Variedades abelianas, grupos Kleinianos, superficies de Riemann

Parcialmente financiado por Fondecyt 1150003 y Anillo ACT 1415 PIA-CONICYT.

Índice general

Introducción	v
Parte 1. Toros Analíticos y Variedades Abelianas	1
Capítulo 1. Toros Analíticos	3
1.1. Conceptos básicos	3
1.2. Homomorfismos	4
1.3. Isogenias	6
1.4. Toros y Dualidad	7
Capítulo 2. Variedades Abelianas	11
2.1. Generalidades	11
2.2. Polarizaciones	12
2.3. Teoría del descenso	14
2.4. Forma real de una variedad abeliana polarizada	16
2.5. Polarizaciones y Matrices Período	16
Capítulo 3. Variedades Abelianas principalmente polarizadas	19
3.1. Complementos ortogonales	19
Capítulo 4. Curvas y Variedades de Prym generalizadas	21
4.1. Variedades de Prym	22
4.2. Cubrimientos Galois y Variedades de Prym	26
Capítulo 5. Estructura real	31
5.1. Variedades abelianas y su estructura real	31
5.2. Automorfismos y estructura real	31
Bibliografía	33
Parte 2. Grupos Kleinianos y Variedades Abelianas	35
Capítulo 6. Grupos Kleinianos	37
6.1. Superficies de Klein	37
6.2. Ejemplo de Superficie de Klein	37
6.3. Automorfismos de Superficies de Klein	39
6.4. Automorfismos del Disco Unitario	39
6.5. Automorfismos de la Esfera de Riemann	40
6.6. Razones cruzadas	42
6.7. Círculos Isométricos	43
6.8. Grupos Kleinianos	45

6.9.	Espacio Hiperbólico 3-Dimensional: Extensión de Poincaré	50
6.10.	Teorema de Uniformización de Koebe	55
6.11.	Superficies de Klein de Grupos Kleinianos	55
6.12.	Subgrupos Kleinianos Planares	65
Capítulo 7.	Cubrimientos Homológicos	69
7.1.	Jacobianas y Matrices de Riemann	69
7.2.	Variedades de Prym	70
7.3.	Automorfismos de Superficies de Riemann y Jacobianas	74
7.4.	Superficies de Klein y Jacobianas	76
7.5.	Cubrimiento Homológico de Superficies de Klein	78
Capítulo 8.	Grupos de Schottky y Variedades Abelianas	83
8.1.	Grupos de Schottky	83
8.2.	Grupos de Schottky y Automorfismos	84
8.3.	Grupos de Schottky con Círculos Invariantes	88
Capítulo 9.	Superficies de Riemann Maximal Simétricas	91
9.1.	Superficies Maximales Simétricas	91
9.2.	Uniformizaciones de $S/K(S, \tau)$	92
9.3.	Superficies Maximales Simétricas de Género 2	93
9.4.	Superficies Maximales Simétricas de Género 3	98
9.5.	Superficies de Riemann Maximal Simétricas de Género 5	104
Capítulo 10.	Variedades Hiperbólicas 3-Dimensionales	111
10.1.	Variedades Hiperbólicas son Atoroidales	112
10.2.	Ejemplo 1: Complemento de Nudos	114
10.3.	Ejemplo2: Fibrados sobre S^1	116
10.4.	Ejemplo 3: Handlebodies	122
10.5.	Ejemplo 4: Grupos CasiFuchsianos	123
Bibliografía		125
Índice alfabético		127

Introducción

Nuestra principal motivación para escribir estas modestas notas en la teoría de superficies de Riemann, grupos Kleinianos y variedades Abelianas fue que, en nuestra lengua castellana, no existe mucha bibliografía para estudiantes y no especialistas. Si bien hay una gran cantidad de libros y artículos en inglés (léase también alemán, francés, ruso, etc), nos parece esencial que la matemática sea un bien mundial al alcance de todos, sin distinción de idioma, ni clase económica, social o religiosa. Estamos conscientes de que estas notas son aún muy primitivas, pero esperamos poder depurarlas con el tiempo y la ayuda de colegas y, en especial, de estudiantes.

Nuestro punto de vista fue relacionar entre sí tres tópicos que generalmente aparecen por separado en muchos libros, siendo ellos superficies de Riemann, grupos Kleinianos (en particular, grupos de Schottky), y variedades Abelianas (en particular, Jacobianas y Pryms). En la última sección hemos agregado unas líneas sobre variedades hiperbólicas tres-dimensionales a manera de completitud. Para todo lo tratado se menciona algunas referencias en la bibliografía, que sin duda dista de ser una lista exhaustiva. Aún así, en las referencias de lo allí citado se puede encontrar bastante material de apoyo.

Además de estas notas, el grupo de Geometría Compleja de Chile ha publicado cuatro volúmenes informales sobre estos tópicos, y también un volumen especial (el número 240) en *Contemporary Mathematics* de la Sociedad de Matemática de USA, con temas discutidos en el Primer Congreso Iberoamericano de Geometría, hecho en Chile en 1998. Esperamos poder seguir aportando materiales como éstos al medio matemático chileno, y que ojalá también sea de utilidad para los estudiantes de otros países de nuestra Latinoamérica joven.

Rubén A. Hidalgo
Rubí E. Rodríguez
Temuco, Chile

Parte 1

Toros Analíticos y Variedades Abelianas

Toros Analíticos

1.1. Conceptos básicos

Los objetos que consideraremos en este capítulo son los toros analíticos; es decir, las variedades complejas de la forma $T = V/L$, donde V es un espacio vectorial complejo de dimensión g y L es un reticulado en V (i.e., un subgrupo discreto de rango $2g$ en V , y por lo tanto isomorfo a \mathbb{Z}^{2g}).

Es claro que entonces T es una variedad compleja compacta de dimensión g , además de ser un grupo abeliano. Nótese que $\Pi : V \rightarrow T$ es el cubrimiento universal de $T = V/L$, donde Π es la proyección canónica. Además se puede identificar $V \approx T_0(T)$ (el espacio tangente a T en el origen = neutro de T) y $L \approx \Pi_1(T, 0) = H_1(T, \mathbb{Z})$, por ser L abeliano.

Para ejemplificar la teoría general, recurriremos constantemente al caso más simple, $g = 1$:

Ejemplo 1.1. Consideramos dos vectores $\{z_1, z_2\}$ en \mathbb{C} linealmente independientes sobre \mathbb{R} y definimos $L = \{nz_1 + mz_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$. Entonces $T = \mathbb{C}/L$ es un toro analítico de dimensión uno, es decir una superficie de Riemann de género uno.

En el caso general, para describir un toro analítico $T = V/L$, escogemos bases v_1, \dots, v_g de V y f_1, \dots, f_{2g} de L . Denotemos por $\pi_{1j}, \dots, \pi_{gj}$ las coordenadas de f_j con respecto a la base v_1, \dots, v_g . La matriz

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \dots & \pi_{1,2g} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{g1} & \dots & \pi_{g,2g} \end{pmatrix}$$

en $M(g \times 2g, \mathbb{C})$ se llama la *matriz período* de T (con respecto a las bases escogidas).

Al revés, tenemos

Proposición 1.1. $\Pi \in M(g \times 2g, \mathbb{C})$ es la matriz período de algún toro analítico si y sólo si la matriz $P = \begin{pmatrix} \Pi \\ \bar{\Pi} \end{pmatrix}$ en $M(2g \times 2g, \mathbb{C})$ es no singular, donde $\bar{\Pi}$ denota la matriz compleja conjugada de Π .

DEMOSTRACIÓN. Π es una matriz período si y sólo si los vectores columna de Π generan un reticulado en V si y sólo si las columnas son linealmente independientes sobre \mathbb{R} .

Supongamos primero que las columnas son linealmente dependientes sobre \mathbb{R} . Entonces existe $x \in \mathbb{R}^{2g}$, $x \neq 0$, con $\Pi x = 0$, y por lo tanto $Px = 0$.

Si P es singular, hay vectores $x, y \in \mathbb{R}^{2g}$, no ambos cero, tales que

$P(x+iy) = 0$. Pero entonces $\Pi(x+iy) = 0$ y $\bar{\Pi}(x+iy) = \Pi(x-iy) = 0$, y esto implica $\Pi x = \Pi y = 0$. Luego las columnas de Π son l.d. sobre \mathbb{R} . \square

Ejemplo 1.2. $z_1 = 1, z_2 = \tau$ con $\Im\tau > 0$. Tomamos las bases $v = 1$ de \mathbb{C} y $f_1 = 1, f_2 = \tau$ de L . Entonces la matriz período es $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & \tau \end{pmatrix}$.

1.2. Homomorfismos

Definición 1.2. Sean T_1 y T_2 dos toros analíticos.

- i) Un *homomorfismo* de T_1 en T_2 es una función analítica $f : T_1 \rightarrow T_2$ compatible con la estructura de grupo.
- ii) Para $z_0 \in T_2$ se define la *translación por z_0* como la función analítica $t_{z_0} : T_2 \rightarrow T_2$ dada por $t_{z_0}(z) = z + z_0$.

Proposición 1.3. Sea $h : T_1 \rightarrow T_2$ una función analítica, con $T_1 = V_1/L_1$ y $T_2 = V_2/L_2$. Entonces

- a) existe un único homomorfismo $f : T_1 \rightarrow T_2$ tal que

$$h = t_{h(0)} \circ f,$$

i.e. $h(z) = f(z) + h(0)$ para todo $z \in T_1$, y

- b) existe una única función \mathbb{C} -lineal $F : V_1 \rightarrow V_2$ con $F(L_1) \subseteq L_2$ que induce el homomorfismo f .

DEMOSTRACIÓN. Se define $f = t_{-h(0)} \circ h$, y se levanta la función compuesta $V_1 \xrightarrow{\pi_1} T_1 \xrightarrow{f} T_2$ al cubrimiento universal V_2 de T_2 :

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{F} & V_2 \\ & \searrow f \circ \pi_1 & \swarrow \pi_2 \\ & & T_2 \end{array}$$

de manera que $F(0) = 0$.

El diagrama implica que $F(v+l) - F(v) \in L_2$ para todo $l \in L_1$ y $v \in V_1$. Entonces esta función continua de v es constante. Así

$$F(v+l) = F(v) + F(l)$$

para todo $l \in L_1$ y $v \in V_1$, y por lo tanto las derivadas parciales de F son periódicas con períodos L_1 , y por lo tanto constantes. Como $F(0) = 0$, se sigue que F es \mathbb{C} -lineal. La unicidad de F es clara. \square

Con la suma punto a punto, el conjunto de homomorfismos de T_1 en T_2 es un grupo abeliano, denotado por $\text{Hom}(T_1, T_2)$. La proposición anterior da un homomorfismo inyectivo

$$\rho_a : \text{Hom}(T_1, T_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$$

dado por $\rho_a(f) = F$ y llamado la *representación analítica* de $\text{Hom}(T_1, T_2)$.

Por otra parte, la restricción $F_{L_1} : L_1 \rightarrow L_2$ de F al reticulado L_1 es \mathbb{Z} -lineal; además, F_{L_1} determina a F y a f completamente. Así obtenemos un homomorfismo inyectivo

$$\rho_r : \text{Hom}(T_1, T_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L_1, L_2)$$

dado por $\rho_r(f) = F_{L_1}$ y llamado la *representación racional* de $\text{Hom}(T_1, T_2)$.

En particular si $T_1 = T_2$, un homomorfismo $f : T_1 \rightarrow T_1$ se dice un *endomorfismo* de T_1 y se tiene que ρ_a es representación del anillo $\text{End}(T_1) = \text{Hom}(T_1, T_1)$ y ρ_r es representación del anillo $\text{End}_{\mathbb{Q}}(T_1) = \text{End}(T_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Ejemplo 1.3. Para todo toro $T = V/L$ y para todo entero n se tiene el endomorfismo $n_T : T \rightarrow T$ inducido por $F : V \rightarrow V$ dado por $F(z) = nz$.

Supongamos ahora que $\Pi_1 \in M(g \times 2g, \mathbb{C})$ y $\Pi_2 \in M(p \times 2p, \mathbb{C})$ son matrices período para T_1 y T_2 con respecto a algunas bases de V_1, L_1 y de V_2, L_2 . Sea $f : T_1 \rightarrow T_2$ un homomorfismo. Con respecto a las bases dadas, la representación $\rho_a(f)$ (respectivamente $\rho_r(f)$) está dada por una matriz $a \in M(p \times g, \mathbb{C})$ (respectivamente $r \in M(2p \times 2g, \mathbb{Z})$).

La condición $\rho_a(f)(L_1) \subseteq L_2$ se expresa en términos de matrices por

$$(1.1) \quad a\Pi_1 = \Pi_2 r .$$

Recíprocamente, dos matrices $a \in M(p \times g, \mathbb{C})$ y $r \in M(2p \times 2g, \mathbb{Z})$ que satisfacen (1.1) definen un homomorfismo $T_1 \rightarrow T_2$.

Ejemplo 1.4. $\tau = i$, $f \in \text{End}(T)$ dada por $f([z]) = [iz]$. Entonces $F(z) = iz$, $a = (i)$, $r = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $(i)(1 \ i) = (1 \ i) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ahora veremos cómo se relacionan estas dos representaciones.

Proposición 1.4. *La representación racional de $\text{End}(T)$ es equivalente a la suma directa de la representación analítica y su compleja conjugada (extendidas a representaciones sobre \mathbb{C}):*

$$\rho_r \otimes 1 : \text{End}_{\mathbb{Q}}(T) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(L \otimes \mathbb{C}) = \text{End}_{\mathbb{C}}(V \times V) \simeq_{\mathbb{C}} \rho_a \oplus \overline{\rho_a}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea Π la matriz período de T con respecto a algunas bases de V y L . Supongamos $f \in \text{End}(T)$. Si a y r son las matrices de $\rho_a(f)$ y $\rho_r(f)$ con respecto a las bases dadas, la igualdad (1.1) implica que

$$(1.2) \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \bar{\Pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi \\ \bar{\Pi} \end{pmatrix} r.$$

Como $P = \begin{pmatrix} \Pi \\ \bar{\Pi} \end{pmatrix}$ es no singular, hemos demostrado la proposición. \square

Ejemplo 1.5. Continuando con el ejemplo 1.4, la ecuación correspondiente a (1.2) queda de la forma siguiente.

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definición 1.5. Sea $T = V/L$ un toro y S un subconjunto de T . Se dice que S es un *subtoro* de T si existe un subespacio W de V y un reticulado M en W tal que $M \subseteq W \cap L$ y tal que $S = W/M$.

Proposición 1.6. *Sea $f : T_1 \rightarrow T_2$ un homomorfismo de toros. Entonces*

1. $\text{Im } f$ es un subtoro de T_2 , y
2. $\ker f$ es un subgrupo compacto de T_1 . Su componente conexa que contiene a 0, denotada por $(\ker f)_0$, es un subtoro de T_1 , de índice finito en $\ker f$.

DEMOSTRACIÓN. Para probar (1) notamos que $V_3 = F(V_1)$ es un subespacio vectorial de V_2 . Consideremos ahora $L_3 = L_2 \cap F(V_1)$: entonces L_3 es discreto, pues está contenido en L_2 , y además genera a V_3 como \mathbb{R} espacio vectorial, pues contiene a $F(L_1)$. Es claro que $\text{Im } f = V_3/L_3$.

Ahora probaremos (2): como $\ker f = f^{-1}(0_{T_2})$, se tiene de inmediato que $\ker f$ es un subgrupo cerrado de T_1 , y por lo tanto compacto. Entonces tiene una cantidad finita de componentes conexas, cada una compacta. Así basta probar que $(\ker f)_0$ es un subtoro de T_1 para completar la demostración. Como la representación analítica F de f es lineal, se tiene que $V_4 = F^{-1}(L_2)_0$ es un subespacio vectorial de V_1 . Es claro que $(\ker f)_0 = V_4/L_1 \cap V_4$; además, de $(\ker f)_0$ compacto se sigue que $L_1 \cap V_4$ es un reticulado en V_4 , y por lo tanto $(\ker f)_0$ es un subtoro de T_1 . \square

Ejemplo 1.6. Para cada toro $T = V/L$ y entero $n \neq 0$, el endomorfismo n_T de T definido en el Ejemplo 1.3 tiene como núcleo a los puntos de orden n de T , denotados por $T[n]$. Nótese que $T[n] \approx (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$.

Observación 1.1. Nótese que en general $\text{Im } f$ no coincide con $F(V_1)/F(L_1)$. Por ejemplo, sea $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ dada por $F(z) = (nz, 0)$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces F induce un homomorfismo $f : T = \mathbb{C}/L \rightarrow T_2 = \mathbb{C}^2/L \times L$ para cualquier reticulado L en \mathbb{C} , y se tiene $F(T[n]) = (0, 0) \subseteq L \times L$ y $F(\mathbb{C}) \cap (L \times L) = L \times \{0\}$ pero $F(L) = nL \times \{0\}$. Así obtenemos $F(\mathbb{C})/F(L) \subsetneq F(\mathbb{C})/F(\mathbb{C}) \cap (L \times L) = f(T)$ para $n > 1$.

1.3. Isogenias

Proposición 1.7. Si $f : T_1 \rightarrow T_2$ es un homomorfismo de toros, entonces cualesquiera dos de las condiciones siguientes implica la tercera.

1. $\dim T_1 = \dim T_2$;
2. f es sobreyectiva;
3. $\ker f$ es finito.

Además, cualesquiera dos son equivalentes a que la representación racional de f sea un isomorfismo.

Definición 1.8. Un homomorfismo de toros complejos $f : T_1 \rightarrow T_2$ se dice una *isogenia* si satisface las condiciones de la Proposición anterior.

Para una isogenia f se define el *grado* de f , $\text{gr } f$, como la cardinalidad de $\ker f$ y el *exponente* de f , e_f , como el exponente del grupo $\ker f$: el menor entero positivo n tal que $nx = 0$ para todo $x \in \ker f$.

Observación 1.2. Continuando con el ejemplo 1.3, del hecho que su representación racional sea un automorfismo de V obtenemos que n_T es una isogenia de T en T , para $n \neq 0$. Además $\text{gr } n_T = n^{2 \dim T}$ y $e_f = |n|$.

Que n_T sea una isogenia tiene la importante consecuencia que T es *divisible*: para cada $t \in T$ y para cada n entero no cero, existe $s \in T$ tal que $ns = t$. En particular, si nF es subgrupo de H , con F y H subtoros de T , entonces F es subgrupo de H .

Ejemplo 1.7. Para cada subgrupo finito H de un toro $T = V/L$, podemos considerar el grupo T/H y la proyección canónica $p : T \rightarrow T/H$. Entonces T/H es un toro complejo de la misma dimensión que T , pues si $\pi : V \rightarrow T$ denota la proyección canónica, entonces se tiene que $T/H = V/\pi^{-1}(H)$, y p es una isogenia con $\ker p = H$.

Más aún, toda isogenia es claramente de este tipo, módulo isomorfismo.

Ejemplo 1.8. Sea V un espacio vectorial complejo y L_1, L_2 dos reticulados en V tales que $L_1 \subseteq L_2$. Entonces la función identidad de V induce una isogenia $f : V/L_1 \rightarrow V/L_2$, con $\ker f = L_2/L_1$.

Más aún, toda isogenia es claramente de este tipo, módulo isomorfismo.

En este contexto, si $T = V/L$ es un toro complejo entonces $T[n] = \frac{1}{n}L/L \approx \frac{L}{nL}$ y la isogenia n_T se puede realizar como en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc}
 V & \xrightarrow{id_V} & V & \xrightarrow{\text{mult. por } n} & V \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 V/nL & \xrightarrow{\text{isogenia}} & V/L & \xrightarrow{\text{isom.}} & V/nL
 \end{array}$$

Es claro que la composición de isogenias es una isogenia; el próximo resultado probará que las isogenias producen una relación de equivalencia entre toros.

Proposición 1.9. Sea $f : T_1 \rightarrow T_2$ una isogenia y denotemos por $e = e_f$ su exponente. Entonces existe una única isogenia $g : T_2 \rightarrow T_1$ tal que $g \circ f = e_{T_1}$ y $f \circ g = e_{T_2}$.

DEMOSTRACIÓN. Una demostración se basa en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 T_1 & \xrightarrow{f} & T_2 \\
 e_{T_1} \downarrow & \swarrow g & \downarrow e_{T_2} \\
 T_1 & \xrightarrow{f'} & T_2
 \end{array}$$

Paso 1: Como $\ker f \subseteq \ker e_{T_1}$, existe un único homomorfismo $g : T_2 \rightarrow T_1$ tal que $g \circ f = e_{T_1}$.

Además se tiene que $\ker g \subseteq f(T_1[e])$, pues $T_1[e] = \ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker g)$.

Paso 2: Como $f(T_1[e]) \subseteq T_2[e] = \ker e_{T_2}$, se sigue que $\ker g \subseteq \ker e_{T_2}$, y por lo tanto existe un homomorfismo $f' : T_2 \rightarrow T_1$ tal que $f' \circ g = e_{T_2}$.

Pero $f' \circ e_{T_1} = f' \circ g \circ f = e_{T_2} \circ f = f \circ e_{T_1}$; como e_{T_1} es sobreyectiva se sigue que $f' = f$.

“Otra” demostración es la siguiente.

Si $f : V/L_1 \rightarrow V/L_2$ es inducida por la identidad de V , entonces $eL_1 \subseteq eL_2 \subseteq L_1 \subseteq L_2$ y el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & e_{T_2} & & \\
 & & & & \curvearrowright & & \\
 T_1 = V/eL_1 & \xrightarrow{f} & T_2 = V/eL_2 & \xrightarrow{g} & T_1 = V/L_1 & \xrightarrow{f} & T_2 = V/L_2 \\
 & \searrow & & & \curvearrowleft & & \\
 & & & & e_{T_1} & &
 \end{array}$$

□

1.4. Toros y Dualidad

Para cada toro $T = V/L$ consideramos el espacio vectorial complejo (de dimensión igual a $\dim_{\mathbb{C}} V$)

$$\overline{\Omega} = \text{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(V, \mathbb{C}) = \{h : V \rightarrow \mathbb{C} : h \text{ antilineal}\}$$

Entonces se tiene lo siguiente.

1. Hay un isomorfismo de \mathbb{R} espacios vectoriales

$$\overline{\Omega} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$$

dado por $h \rightarrow \text{Im } h$, con inversa $k \rightarrow h$ dada por $h(v) = -k(iv) + ik(v)$.

2. Se sigue que la forma bilineal

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \overline{\Omega} \times V \rightarrow \mathbb{R}, \langle h, v \rangle = \text{Im } h(v)$$

es no-degenerada.

3. Entonces

$$\widehat{L} = \{h \in \overline{\Omega} : \text{Im } h(L) \subseteq \mathbb{Z}\}$$

es un reticulado en $\overline{\Omega}$.

Definición 1.10. Para todo toro $T = V/L$ se define el toro dual por $\widehat{X} = \overline{\Omega}/\widehat{L}$.

Observación 1.3. Hay un homomorfismo sobreyectivo

$$\overline{\Omega} \rightarrow \text{Hom}(L, S^1), \quad h \rightarrow \exp(2\pi i \langle h, \bullet \rangle) = \exp(2\pi i \text{Im } h(\bullet))$$

cuyo núcleo es \widehat{L} , y por lo tanto $\widehat{T} \approx \text{Hom}(L, S^1)$.

Observación 1.4. Mediante la forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$ anterior podemos identificar $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ con V . Como la forma es no-degenerada, se tiene además que \widehat{L} se identifica con L y por lo tanto $\widehat{T} = T$.

Definición 1.11. Si $f : T_1 \rightarrow T_2$ es un homomorfismo de toros, con representación analítica $F : V_1 \rightarrow V_2$ y $F(L_1) \subseteq L_2$, entonces podemos definir una función \mathbb{C} -lineal $F^* : \overline{\Omega}_2 \rightarrow \overline{\Omega}_1$ por $F^*(h) = h \circ F$, que además satisface $F^*(L_2) \subseteq L_1$.

A su vez, ésta induce $\widehat{f} : \widehat{T}_2 \rightarrow \widehat{T}_1$, el *homomorfismo dual* a f .

Proposición 1.12. Si $f : T_1 \rightarrow T_2$ es una isogenia de toros, entonces $\widehat{f} : \widehat{T}_2 \rightarrow \widehat{T}_1$ también lo es. Además se tiene $\ker(\widehat{f}) \approx \text{Hom}(\ker f, S^1)$ y $\text{gr}(\widehat{f}) = \text{gr}(f)$.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que f está inducida por la identidad de V y que $L_1 \subseteq L_2$ como sigue.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\text{id}_V} & V \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ T_1 = V/L_1 & \xrightarrow{f} & T_2 = V/L_2 \end{array}$$

Dualizando obtenemos

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Omega} & \xleftarrow{\text{id}_{\overline{\Omega}}} & \overline{\Omega} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{T}_1 \approx \text{Hom}(L_1, S^1) & \xleftarrow{\widehat{f}} & \widehat{T}_2 \approx \text{Hom}(L_2, S^1) \end{array}$$

Así \widehat{f} es una isogenia y además $\ker(\widehat{f}) \approx \ker(\text{Hom}(L_2, S^1) \rightarrow \text{Hom}(L_1, S^1)) \approx \text{Hom}(L_2/L_1, S^1) \approx \text{Hom}(\ker(f), S^1)$. \square

Proposición 1.13. Para toda sucesión exacta de toros

$$0 \rightarrow T_1 \xrightarrow{f} T_2 \xrightarrow{g} T_3 \rightarrow 0$$

la sucesión dual

$$0 \leftarrow \widehat{T}_1 \xleftarrow{\widehat{f}} \widehat{T}_2 \xleftarrow{\widehat{g}} \widehat{T}_3 \leftarrow 0$$

es exacta.

DEMOSTRACIÓN. De la hipótesis se sigue que la sucesión siguiente es exacta.

$$0 \rightarrow L_1 \xrightarrow{\rho_r(f)} L_2 \xrightarrow{\rho_r(g)} L_3 \rightarrow 0$$

Como ésta es una sucesión de grupos abelianos libres entonces escinde; i.e., existe homomorfismo $q : L_3 \rightarrow L_2$ tal que $\rho_r(g) \circ q = \text{id}_{L_3}$; también $L_2 = \rho_r(f)(L_1) \oplus q(L_3)$. Pero entonces se puede probar que la siguiente sucesión inducida es exacta (y también escinde).

$$0 \leftarrow \text{Hom}(L_1, S^1) \leftarrow \text{Hom}(L_2, S^1) \leftarrow \text{Hom}(L_3, S^1) \leftarrow 0$$

□

Corolario 1.14. Si T_1 es un subtoro de T_2 y si $i : T_1 \hookrightarrow T_2$ denota la inclusión, entonces $\widehat{i} : \widehat{T}_2 \rightarrow \widehat{T}_1$ tiene núcleo conexo y $\dim(\ker \widehat{i}) = \dim T_2 - \dim T_1$.

DEMOSTRACIÓN. Consideramos el toro complejo $T_3 = T_2/T_1$ y la proyección canónica $p : T_2 \rightarrow T_3$. Entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow T_1 \xrightarrow{i} T_2 \xrightarrow{p} T_3 \rightarrow 0$$

y por la proposición anterior su dual es exacta. Pero entonces $\ker(\widehat{i}) = \widehat{p}(\widehat{T}_3)$, que es conexo por ser la imagen de un conexo. □

Corolario 1.15. Si $f : T_1 \rightarrow T_2$ es un homomorfismo con núcleo finito (es decir, una isogenia sobre su imagen), entonces el número de componentes conexas de $\ker \widehat{f}$ coincide con el grado de f .

En particular, si f es inyectiva entonces $\ker \widehat{f}$ es conexo.

DEMOSTRACIÓN. Reescribimos f como la composición de una inyección i y una isogenia f_1 con $\ker f = \ker f_1$, como sigue.

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ & \curvearrowright & \\ T_1 & \xrightarrow{f_1} & f(T_1) \xrightarrow{i} T_2 \end{array}$$

Dualizando obtenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{T}_1 & \xleftarrow{\widehat{f}_1} & \widehat{f(T_1)} \xleftarrow{\widehat{i}} \widehat{T}_2 \\ & \curvearrowleft & \\ & \widehat{f} & \end{array}$$

De aquí se sigue que si para cada x en $\ker \widehat{f}_1$ escogemos un y_x en $\widehat{i}^{-1}(x)$ entonces

$$\ker \widehat{f} = \ker(\widehat{f}_1 \circ \widehat{i}) = \widehat{i}^{-1}(\ker \widehat{f}_1) = \bigcup_{x \in \ker \widehat{f}_1} (y_x + \ker \widehat{i})$$

es la descomposición de $\ker \widehat{f}$ en sus componentes conexas, ya que $\ker \widehat{i}$ es conexo. Como $\ker f = \ker f_1$, hemos probado el resultado. □

Variedades Abelianas

2.1. Generalidades

Proposición 2.1. *Sea V un espacio vectorial complejo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- 1) *Existe una forma E real bilineal y antisimétrica en V que satisface $E(iv, iw) = E(v, w)$ para todo $v, w \in V$.*
- 2) *Existe una forma Hermitiana H en V .*

DEMOSTRACIÓN. Dada E como en 1), se define H por

$$H(v, w) = E(iv, w) + iE(v, w)$$

y dada H , se define E por

$$E = \text{Im}(H). \quad \square$$

□

Definición 2.2. Supongamos que para un toro $T = V/L$ existe una forma Hermitiana H en V tal que $\text{Im } H(L \times L) \subseteq \mathbb{Z}$; equivalentemente, que existe una forma E real alternante en V tal que $E(iv, iw) = E(v, w)$ para todo $v, w \in V$ y tal que $E(L \times L) \subseteq \mathbb{Z}$.

Entonces podemos definir la función \mathbb{C} -lineal $\phi_H = \phi_E : V \rightarrow \overline{\Omega}$ por $\phi_H(v) = H(v, \bullet)$.

Se verifica que $\phi_H(L) \subseteq \widehat{L}$ y por lo tanto se tiene un homomorfismo inducido

$$\lambda_H = \lambda_E : T \rightarrow \widehat{T}$$

con representación analítica ϕ_H .

En este caso también se define $K(\lambda_H) = K(H) = K(E) = \ker(\lambda_H)$.

Observación 2.1. Nótese que bajo la identificación $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{\Omega}, \mathbb{C}) \approx V$ mencionada en la Observación 1.4 se tiene que $\phi_H^* = \phi_H$ y usando $\widehat{\widehat{T}} = T$ obtenemos $\widehat{\lambda_H} = \lambda_H$.

Proposición 2.3. *Para cada par $(T = V/L, H)$ como en la definición 2.2 consideremos*

$$L(\lambda_H) = L(H) = L(E) = \{v \in V : \text{Im } H(v, L) \subseteq \mathbb{Z}\} = \phi_H^{-1}(\widehat{L}).$$

Entonces se tiene $K(H) = L(H)/L$.

Corolario 2.4. *Sea $T = V/L$ un toro para el cual existe una forma Hermitiana H definida en V tal que $\text{Im } H(L \times L) \subseteq \mathbb{Z}$.*

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes

1. *H es no-degenerada;*
2. *$\det(\text{Im } H|_{L \times L}) \neq 0$*
3. *ϕ_H es un isomorfismo;*
4. *λ_H es una isogenia;*

5. $|K(H)|$ es finito;
6. $[\phi_H^{-1}(\widehat{L}) : L]$ es finito;
7. $[L(H) : L]$ es finito.

Si cualesquiera de estas condiciones vale, entonces

$$|K(H)| = \text{gr}(\lambda_H) = [\phi_H^{-1}(\widehat{L}) : L] = [L(H) : L] = \det(\text{Im } H|_{L \times L}).$$

2.2. Polarizaciones

Definición 2.5. Un toro $T = V/L$ es una *variedad abeliana* (v.a.) si

1. existe H forma Hermitiana en V (respectivamente E forma real alternante en V tal que $E(iv, iw) = E(v, w)$ para todo $v, w \in V$),
2. con $(\text{Im } H)(L \times L) \subset \mathbb{Z}$ (respectivamente $E(L \times L) \subset \mathbb{Z}$) y
3. además se satisface cualesquiera de las condiciones del Corolario 2.4.

En ese caso se dice que H o E o λ_H es una *polarización* de T .

El par (T, H) o (T, E) o (T, λ_H) se llama una *variedad abeliana polarizada* (v.a.p.: variedad abeliana polarizada).

Ejemplo 2.1. Con $g = 1$ y $L = \{n + m\tau : n, m \in \mathbb{Z}\}$, donde $\Im\tau > 0$, se tiene $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $H(v, w) = \frac{v\bar{w}}{\Im\tau}$.

De esta manera vemos que todo toro de dimensión uno es una variedad abeliana polarizada. Esto no es válido para dimensiones mayores (ver Ejemplos 2.3 y 2.4).

Definición 2.6. Si T_1 es un toro complejo, (T_2, H) es una variedad abeliana polarizada y $f : T_1 \rightarrow T_2$ es un homomorfismo con $\ker f$ finito, entonces podemos definir una polarización en T_1 por $f^*(H)(v_1, v_2) = H(\rho_a(f)(v_1), \rho_a(f)(v_2))$. Equivalentemente, definimos $\lambda_{f^*(H)} = \widehat{f} \circ \lambda_H \circ f$ y se tiene que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \xrightarrow{\lambda_{f^*(H)}} & \widehat{T}_1 \\ f \downarrow & & \uparrow \widehat{f} \\ T_2 & \xrightarrow{\lambda_H} & \widehat{T}_2 \end{array}$$

Esta polarización se llama la *polarización inducida* por f .

Definición 2.7. Un *homomorfismo entre variedades abelianas polarizadas* (T_1, H_1) y (T_2, H_2) es un homomorfismo $f : T_1 \rightarrow T_2$ de toros complejos tal que $H_1 = f^*(H_2)$. Equivalentemente, si $\lambda_{f^*(H_2)} = \lambda_{H_1}$. Nótese que entonces $\ker f$ es finito, ya que H_1 es no-degenerada.

Definición 2.8. Si (T, E) es una variedad abeliana polarizada, con $T = V/L$, entonces existe una base de L con respecto a la cual la matriz de E se escribe

$$E = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$$

donde $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_g \end{pmatrix}$, donde los d_j son enteros positivos (independientes de la base escogida) tales que $d_i \mid d_{i+1}$ para todo i en $\{1, \dots, g-1\}$. Una tal base se llama *simpléctica*.

La secuencia (d_1, d_2, \dots, d_g) se llama el *tipo* de la polarización.

Definición 2.9. Una descomposición en suma directa $L = L_1 \oplus L_2$ se llama una *descomposición de L para E* (o para H) si L_1 y L_2 son isotrópicos para la forma alternada E : i.e., si $E(l, m) = 0$ para l y m simultáneamente en L_1 o en L_2 .

Siempre existe una tal descomposición: si f_1, \dots, f_{2g} es una base simpléctica para L , basta tomar $L_1 = \langle f_1, \dots, f_g \rangle$ y $L_2 = \langle f_{g+1}, \dots, f_{2g} \rangle$. Al revés, para toda descomposición de $L = L_1 \oplus L_2$ para E existe una base simpléctica f_1, \dots, f_{2g} tal que $L_1 = \langle f_1, \dots, f_g \rangle$ y $L_2 = \langle f_{g+1}, \dots, f_{2g} \rangle$.

Una descomposición $V = V_1 \oplus V_2$ en subespacios reales se llama una *descomposición de V para E* (o para H) si $(V_1 \cap L) \oplus (V_2 \cap L)$ es una descomposición de L para E . Una tal descomposición de V es claramente una descomposición en subespacios vectoriales isotrópicos maximales. No al revés.

Es claro que las descomposiciones de L y de V para E están en biyección.

Proposición 2.10. Sea $(T = V/L, H)$ una variedad abeliana polarizada de tipo (d_1, d_2, \dots, d_g) y sea $L = L_1 \oplus L_2$ una descomposición de L para E , con respectiva descomposición $V = V_1 \oplus V_2$ de V para E .

Entonces se tiene.

1. $L(H) = L(H)_1 \oplus L(H)_2$, donde $L(H)_i = V_i \cap L(H)$.
2. $K(H) = K_1 \oplus K_2$, donde $K_i = L(H)_i / L_i$.
3. $K_i \approx \bigoplus_{j=1}^g \mathbb{Z}/d_j \mathbb{Z}$ para cada $i = 1, 2$.

Observación 2.2. Nótese que en este caso se tiene

$$K(E) \approx (\mathbb{Z}/d_1 \mathbb{Z})^2 \times \dots \times (\mathbb{Z}/d_g \mathbb{Z})^2 \text{ y } e_{\lambda_E} = d_g.$$

También se tiene que $K(E)$ es isotrópico en $K(d_g E)$.

Definición 2.11. El exponente de una polarización E (o de la variedad abeliana polarizada (T, E)) es el exponente $e_{\lambda_E} = d_g$ de la isogenia λ_E .

Una polarización E se llama principal, y se dice que la variedad abeliana (T, E) es *variedad abeliana principalmente polarizada* (v.a.p.p.), si su exponente es 1; equivalentemente, si $\lambda_E : T \rightarrow \widehat{T}$ es un isomorfismo.

Proposición 2.12.

1. Todo subtoro de una variedad abeliana es una variedad abeliana.
2. Todo toro isógeno a una variedad abeliana es una variedad abeliana.
3. Si un toro T es una variedad abeliana entonces su toro dual \widehat{T} es una variedad abeliana, llamada la variedad abeliana dual, con la misma polarización.

DEMOSTRACIÓN.

1. Se restringe la forma Hermitiana.
2. Ver Definición 2.6.
3. Ver Observación 2.1.

□

Definición 2.13. Si (T, λ_H) es una variedad abeliana polarizada de exponente d_g , entonces sabemos que $\widehat{\lambda_H} = \lambda_H$. Sin embargo, podemos definir otra polarización en \widehat{T} , $\lambda_{\widehat{T}} : \widehat{T} \rightarrow \widehat{\widehat{T}} = T$, como la única isogenia tal que $\lambda_{\widehat{T}} \circ \lambda_H = (d_g)_T$, que sabemos existe por la Proposición 1.9.

Definición 2.14. Una *subvariedad abeliana* (polarizada) de una variedad abeliana polarizada (T, λ_H) es un par $(S, \lambda_{i^*(H)})$, donde S es un subtoro de T , $i : S \hookrightarrow T$ la inclusión y $\lambda_{i^*(H)}$ la polarización inducida en S por la polarización de T . El *exponente* de la subvariedad abeliana se define como el exponente de la polarización inducida: $e_{\lambda_{i^*(H)}}$.

2.3. Teoría del descenso

Una pregunta natural es la siguiente. Dada una variedad polarizada (X, λ_H) y una isogenia $f : X \rightarrow Y$, cuándo existe una polarización en Y que induzca la polarización dada en X ?

Notemos primero la siguiente caracterización.

Proposición 2.15. *Sea $f : X = V/L_X \rightarrow Y = W/L_Y$ una isogenia de toros, con $F : V \rightarrow W$ su representación analítica, y sea E_X una polarización en X .*

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1. *Existe una polarización E_Y en Y tal que $E_X = f^*(E_Y)$.*
2. *$E_X(F^{-1}(L_Y), F^{-1}(L_Y)) \subset \mathbb{Z}$.*

Ahora veremos una noción relacionada, que también será de mucha utilidad.

Definición 2.16. Sea $(T = V/L, E)$ una variedad abeliana polarizada. Se define la *forma de Weil* asociada a la polarización como la forma

$$\mathbf{e}^E : K(E) \times K(E) \rightarrow S^1$$

dada por $\mathbf{e}^E([v_1], [v_2]) = \exp(2\pi i E(v_1, v_2))$, donde v_1 y v_2 denotan elementos de $L(E)$ y $[v_i]$ su respectiva clase en $K(E) = L(E)/L$.

Observación 2.3. Nótese que \mathbf{e}^E es una forma alternante multiplicativa: satisface

1. $\mathbf{e}^E([v_2], [v_1]) = \frac{1}{\mathbf{e}^E([v_1], [v_2])}$,
2. $\mathbf{e}^E([v_1] + [v_3], [v_2]) = \mathbf{e}^E([v_1], [v_2])\mathbf{e}^E([v_3], [v_2])$.

Ejemplo 2.2. Si $E = dE_0$ donde E_0 es una polarización principal con base simpléctica $\{f_1, \dots, f_{2g}\}$, entonces $L(E)$ está generado por $\frac{f_1}{d}, \dots, \frac{f_{2g}}{d}$ y \mathbf{e}^E queda determinado por

$$\mathbf{e}^E \left(\left[\frac{f_i}{d} \right], \left[\frac{f_j}{d} \right] \right) = \begin{cases} \exp\left(\frac{2\pi i}{d}\right) & \text{si } j = g + i \\ \exp\left(-\frac{2\pi i}{d}\right) & \text{si } i = g + j \\ 1 & \text{si no.} \end{cases}$$

La demostración del siguiente resultado es inmediata, por la misma definición de polarización inducida.

Lema 2.17. *Sea $f : T \rightarrow S$ una isogenia y E una polarización en S .*

Entonces

$$\mathbf{e}^{f^*(E)}(x, y) = \mathbf{e}^E(f(x), f(y)) \quad \text{para todo } x, y \in f^{-1}(K(E)).$$

Definición 2.18. Si E es una polarización en T y F es un subgrupo de $K(E)$, se define el ortogonal de F con respecto a E como sigue.

$$\begin{aligned} F^\perp &= \{y \in K(E) : \mathbf{e}^E(y, x) = 1 \text{ para todo } x \in F\} \\ &= \{y \in K(E) : E(y, x) \in \mathbb{Z} \text{ para todo } x \in F\} \end{aligned}$$

Ahora podemos agregar otra condición equivalente en la Proposición 2.15.

Proposición 2.19. *Otra condición equivalente a las de la Proposición 2.15 es la siguiente.*

- (3) *$\ker f$ es un subgrupo isotrópico de $K(E_X)$, con respecto a \mathbf{e}^{E_X} : es decir, se tiene $\ker f \subset K(E_X)$ y $\mathbf{e}^{E_X}|_{\ker f \times \ker f} = 1$.*

Proposición 2.20. *Sea $f : T \rightarrow S$ una isogenia y E una polarización en S . Como siempre, denotamos por $f^*(E)$ la polarización inducida en T . Entonces f induce un isomorfismo de*

$$\frac{(\ker f)^\perp}{\ker f} \rightarrow K(E);$$

equivalentemente, si $x \in K(f^(E))$, entonces $x \in (\ker f)^\perp \iff f(x) \in K(E)$. Además se tiene las siguientes igualdades.*

$$\begin{aligned} |K(E)| &= \frac{|K(f^*(E))|}{|\ker f|^2} \\ |(\ker f)^\perp| &= \frac{|K(f^*(E))|}{|\ker f|} = |K(E)| |\ker f| \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Una manera de probar estos resultados es la siguiente. Supongamos que la isogenia f está inducida por la identidad de V , con $T = V/L$, $S = V/M$ y $L \subset M$. Entonces $\ker f = M/L$, $(\ker f)^\perp = \widehat{M}/L \subset K(f^*(E)) = \widehat{L}/L$ y $K(E) = \widehat{M}/M$. Ahora basta notar que la siguiente sucesión horizontal es exacta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \ker f = M/L & \hookrightarrow & (\ker f)^\perp = \widehat{M}/L & \rightarrow & K(E) = \widehat{M}/M \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & K(f^*E) = \widehat{L}/L & & \end{array}$$

y que

$$\frac{|(\ker f)^\perp|}{|K(E)|} = |\ker f| = [M : L] = [\widehat{L} : \widehat{M}] = \frac{|K(f^*(E))|}{|(\ker f)^\perp|}.$$

□

Juntando todos estos resultados más el de que el cociente de una vap por un grupo finito es una vap ([M1]) obtenemos

Teorema 2.21. *Sea (X, E_X) una variedad abeliana polarizada. Supongamos que existe un subgrupo (finito) U de $K(E_X)$ que es isotrópico con respecto a E_X . Entonces existe una variedad abeliana polarizada (Y, E_Y) isógena a X cuya polarización induce la de X . Además se tiene*

$$|K(E_Y)| = \frac{|K(E_X)|}{|U|^2} \quad \text{y} \quad K(E_Y) \cong \frac{U^\perp}{U}$$

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar la isogenia $f : X \rightarrow Y = X/U$. □

Corolario 2.22. *Sea (X, E_X) una variedad abeliana polarizada. Supongamos que existe un subgrupo (finito) U de $K(E_X)$ que es isotrópico con respecto a E_X y tal que $|U|^2 = |K(E_X)|$. Entonces la variedad abeliana X/U es principalmente polarizada y su polarización induce la de X .*

2.4. Forma real de una variedad abeliana polarizada

En esta sección seguimos la notación e ideas de [Ri].

Definición 2.23. Supongamos que $A = (T = V/L, E)$ es una variedad abeliana polarizada. Entonces la equivalencia natural $L \approx H_1(T, \mathbb{Z})$ induce un isomorfismo lineal $V \approx H_1(T, \mathbb{R})$. Llamamos la *forma real* de la variedad abeliana polarizada A a $H_1(T, \mathbb{R})/H_1(T, \mathbb{Z})$; entonces $H^1(T, \mathbb{R})/H^1(T, \mathbb{Z})$ es la forma real natural de la variedad abeliana dual \hat{A} .

Definición 2.24. Para cada U subconjunto de V definimos

$$U^\perp = \{v \in V : E(v, u) \in \mathbb{Z} \text{ para todo } u \in U\}$$

Entonces se tiene

$$K(E) = \frac{H_1(T, \mathbb{Z})^\perp}{H_1(T, \mathbb{Z})}$$

Observación 2.4. Nótese que un homomorfismo $f : A \rightarrow B$ de variedades abelianas polarizadas induce funciones f_1 y f_2 en homología y cohomología, respectivamente; entonces f_2 es la forma real del homomorfismo dual $\hat{f} : \hat{B} \rightarrow \hat{A}$.

2.5. Polarizaciones y Matrices Período

Ahora estudiaremos la relación entre variedades abelianas polarizadas y las respectivas matrices períodos Π .

Proposición 2.25. Sea $T = V/L$ un toro analítico, con bases v_1, \dots, v_g de V y f_1, \dots, f_{2g} de L . Denotemos por Π la matriz período de T con respecto a estas bases y por $P = \begin{pmatrix} \Pi & \\ & \Pi \end{pmatrix}$.

Sea J una matriz $2g \times 2g$ con coeficientes enteros y determinante uno. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. J es la matriz de una forma E tal que (T, E) es una v.a.p.p.
- 2.

$$iPJ^{-1}P' = \begin{pmatrix} 0 & -H \\ H' & 0 \end{pmatrix}$$

donde H es Hermitiana positiva definida.

3. $\Pi J^{-1} \Pi' = 0$ y $-i\Pi J^{-1} \bar{\Pi}'$ es Hermitiana positiva definida.

Corolario 2.26. Sea (T, E) una v.a.p.p. , $\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. Entonces

1. $\Pi_2 \Pi_1' - \Pi_1 \Pi_2' = 0$ y
2. $-i \left(\Pi_1 \bar{\Pi}_2' - \Pi_2 \bar{\Pi}_1' \right)$ es positiva definida.

En particular, Π_1 y Π_2 son no singulares.

Corolario 2.27. Sea (T, E) una v.a.p.p. Entonces existen bases de V y L con respecto a las cuales $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ y $\Pi = \begin{pmatrix} I & Z \end{pmatrix}$, donde

1. $Z' = Z$ y
2. $\text{Im } Z$ es positiva definida.

DEMOSTRACIÓN. Sea f_1, \dots, f_{2g} una base de L con respecto a la cual la matriz de E está dada por $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$; sea v_1, \dots, v_g una base de V y sea $\Pi_3 = \begin{pmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \end{pmatrix}$ la matriz período con respecto a estas bases. Como Π_1 es invertible por el corolario anterior, se tiene que $\Pi = \Pi_1^{-1}\Pi_3$ es matriz período de T con respecto a las bases f_1, \dots, f_{2g} de L y f_1, \dots, f_g de V y satisface las condiciones dadas. \square

Ejemplo 2.3. No todo toro analítico es una v.a.p.p. Sabemos que si $g = 1$ todo toro analítico es v.a.p.p.; sin embargo, este resultado no es válido para dimensiones mayores: por ejemplo, si $g = 2$, y $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{-2} & \sqrt{-5} \\ 0 & 1 & \sqrt{-3} & \sqrt{-7} \end{pmatrix}$, entonces el toro \mathbb{C}^2/L , donde L es el reticulado generado por las columnas de Π no es una v.a.p.p.; en efecto, si existiese una matriz J que satisficiera la proposición, llegaríamos a encontrar una relación de dependencia algebraica entre los coeficientes de Π .

Proposición 2.28. Sea $T = V/L$ un toro y $f : T \rightarrow \hat{T}$ un homomorfismo con representación analítica $F : V \rightarrow \overline{\Omega}$.

Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. $f = \lambda_H$ para alguna forma Hermitiana H en V ;
2. la forma $H : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $H(v, w) = F(v)(w)$ es Hermitiana.

Corolario 2.29. Sea $T = V/L$ un toro y $f : T \rightarrow \hat{T}$ una isogenia con representación analítica $F : V \rightarrow \overline{\Omega}$.

Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. f es una polarización de T ;
2. la forma $H : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $H(v, w) = F(v)(w)$ es Hermitiana definida positiva.

Ahora probaremos un resultado que no es cierto para toros cualesquiera (ver el Ejemplo 2.4).

Teorema 2.30 (de Reducibilidad de Poincaré). Sea (T, H) una variedad abeliana polarizada y sea S un subtoro de T . Entonces existe un subtoro R de T tal que $T = S + R$ y tal que $S \cap R$ es finito.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $S = W/M$, con W subespacio de V y $M \subseteq W \cap L$, con M reticulado en W .

Como $W/W \cap L \approx WL/L \subseteq V/L$, se obtiene que $W/W \cap L$ es un compacto y por lo tanto $[W \cap L : M]$ es finito.

Definamos $U = W^{\perp H} = \{v \in V : H(v, w) = 0 \forall w \in W\}$

Entonces se tiene

1. $W \cap U = \{0\}$ y $V = W \oplus U$.
2. $U = W^{\perp E}$, pues si $E(v, w) = 0 \forall w \in W$ entonces $E(iv, w) = E(v, -iw) = 0 \forall w \in W$ y se sigue que $H(v, w) = E(iv, w) + iE(v, w) \forall w \in W$, de donde $W^{\perp E} \subseteq W^{\perp H}$. El converso es claro.
3. También se tiene que $U = (W \cap L)^{\perp E}$, pues si escogemos una base $w_1, \dots, w_{2 \dim W}$ de $W \cap L$ entonces cada $w \in W$ se escribe como $w = \sum_{i=1}^{2 \dim W} r_i w_i$, con r_i reales. Además, si $v \in (W \cap L)^{\perp E}$ entonces $E(v, w) = \sum_{i=1}^{2 \dim W} r_i E(v, w_i) = 0$ y se sigue que $(W \cap L)^{\perp E} \subseteq W^{\perp E}$. El converso es obvio.
4. Del punto anterior se concluye que $U \cap L$ tiene rango maximal en U , y por lo tanto $R = U/U \cap L$ es un subtoro de T y $T = S + R$.
5. Además $(W \cap L) \oplus (U \cap L)$ es de índice finito en L , de donde $S \cap R$ es finito.

\square

Observación 2.5. Este teorema puede reformularse en términos de variedades abelianas como sigue.

Si $(S, \lambda_{i^*(H)})$ es una subvariedad abeliana de (T, H) entonces existe una subvariedad abeliana $(R, \lambda_{j^*(H)})$ de (T, H) tal que T es isógena a $S \times R$. Las dos variedades abelianas se dicen *complementarias*. Nótese que es una relación simétrica.

En otras palabras, si $i : S \hookrightarrow T$ y $j : R \hookrightarrow T$ denotan las respectivas inclusiones y $\lambda_{i^*(H)}$ y $\lambda_{j^*(H)}$ las respectivas polarizaciones inducidas entonces el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{i} & T & \xleftarrow{j} & R \\ \lambda_{i^*(H)} \downarrow & & \lambda_H \downarrow & & \downarrow \lambda_{j^*(H)} \\ \widehat{S} & \xleftarrow{\widehat{i}} & \widehat{T} & \xrightarrow{\widehat{j}} & \widehat{R} \end{array}$$

Además se tiene que la aplicación $f : S \times R \rightarrow T$ dada por $f(s, r) = i(s) + j(r)$ es una isogenia con núcleo $S \cap R$.

Ejemplo 2.4. Consideremos el toro $T = \mathbb{C}^2/L$, con L el reticulado generado por $(1, 0), (0, 1), (0, i), (\sqrt{2}, i)$ y el subtoro $S = \mathbb{C} \times \{0\}/M$, con M el reticulado generado por $(1, 0), (0, i)$. Entonces no existe un subtoro R de T tal que T sea isógeno a $S \times R$. En particular, no existe ninguna polarización en T .

Ejemplo 2.5. En general, un par de subvariedades abelianas complementarias puede tener distintos exponentes.

Por ejemplo, supongamos que (T_1, H_1) y (T_2, H_2) son v.a.p.p.'s, y consideremos $T = T_1 \times T_2$, con polarización $H_1 \oplus 2H_2$. Entonces $T_1 \times \{0\}$ y $\{0\} \times T_2$ son subvariedades abelianas complementarias, con respectivos exponentes 1 y 2.

Más adelante (ver Proposición 3.2) veremos que subvariedades complementarias en una v.a.p.p. tienen el mismo exponente.

Definición 2.31. Una variedad abeliana se dice *simple* si las únicas subvariedades abelianas son ella misma y el cero; equivalentemente, si no es isógena a un producto de variedades abelianas de dimensión positiva.

El siguiente resultado sigue del teorema de Reducibilidad de Poincaré por inducción sobre la dimensión de A .

Teorema 2.32 (de Reducibilidad Completa de Poincaré). *Dada una variedad abeliana A , existe una isogenia $A \rightarrow A_1^{n_1} \times \dots \times A_r^{n_r}$, donde cada A_i es una variedad abeliana simple.*

Más aún, las variedades A_i y los enteros n_i son únicos módulo isogenia y permutaciones.

Variedades Abelianas principalmente polarizadas

En este capítulo nos concentraremos en las v.a.p.p.

Recordemos que para una v.a.p.p. A se tiene que λ_A es un isomorfismo, y que un automorfismo de A es un endomorfismo f invertible (automorfismo) del toro tal que $\widehat{f} \circ \lambda_A \circ f = \lambda_A$; en otras palabras, se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A \\ \lambda_A \downarrow & & \downarrow \lambda_A \\ \widehat{A} & \xleftarrow{\widehat{f}} & \widehat{A} \end{array}$$

También se tiene que $\phi_E : V \rightarrow \widetilde{\Omega}$ dada por $\phi_E(v) = H(v, \bullet)$ es un isomorfismo y que $\phi_E(L) = \widehat{L}$. En la notación de la sección 2.4, notemos que para una v.a.p.p. se tiene $L^\perp = L$, pues si $\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}$ es una base simpléctica de L y $v \in L^\perp$ entonces $v = \sum_{j=1}^{2g} a_j \lambda_j$; pero $a_k = E(v, \lambda_{g+k}) \in \mathbb{Z}$ para $1 \leq k \leq g$ y $a_k = E(\lambda_{k-g}, v) \in \mathbb{Z}$ para $g+1 \leq k \leq 2g$.

3.1. Complementos ortogonales

Definición 3.1. Sea (A, λ_A) una v.a.p.p. Denotemos por $i : X \hookrightarrow A$ la inclusión de un subtoro. Sabemos (por Corolario 1.14) que entonces $\ker \widehat{i}$ es conexo y que $\dim \ker \widehat{i} = \dim A - \dim X$. Podemos definir otro subtoro de A (el *complemento ortogonal* de X con respecto a λ_A) por

$$P = P(X, A, \lambda_A) = \lambda_A^{-1}(\ker \widehat{i})$$

Nótese que $\dim P = \dim A - \dim X$.

Sea j la inclusión de P en A . Denotaremos por λ_X y λ_P las polarizaciones inducidas por λ_A en X y P respectivamente, de manera que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & A & \xleftarrow{j} & P \\ \lambda_X \downarrow & & \lambda_A \downarrow & & \downarrow \lambda_P \\ \widehat{X} & \xleftarrow{\widehat{i}} & \widehat{A} & \xrightarrow{\widehat{j}} & \widehat{P} \end{array}$$

Se sigue de la definición que $\widehat{i} \circ \lambda_A \circ j = 0$, y dualizando obtenemos $\widehat{j} \circ \lambda_A \circ i = 0$. Por lo tanto $i(X) = \lambda_A^{-1}(\ker \widehat{j})$, pues claramente $i(X) \subseteq \lambda_A^{-1}(\ker \widehat{j})$ y ambos toros tienen la misma dimensión.

Observación 3.1. Se tiene $K(\lambda_X) = X \cap i^{-1}(j(P)) \approx X \cap P \approx P \cap j^{-1}(i(X)) = K(\lambda_P)$, pues $x \in X \cap i^{-1}(j(P))$ si y sólo si se tiene $i(x) = j(p) \in j(P) \cap i(X)$ y $\lambda_A(i(x)) = \lambda_A(j(p)) \in \ker \widehat{i} \cap \ker \widehat{j}$ si y sólo si $p \in P \cap j^{-1}(i(X))$.

Nótese que, si suponemos $\dim X \geq \dim P = r$, y si la polarización λ_P es de tipo (d_1, \dots, d_r) , entonces se sigue que λ_X es de tipo $(1, \dots, 1, d_1, \dots, d_r)$.

En particular, hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 3.2. *Si X y P son subtoros complementarios ortogonales de A entonces X y P tienen el mismo exponente como subvariedades abelianas.*

Proposición 3.3. *Si X y P son toros complementarios ortogonales de una v.a.p.p. A entonces*

$$f : X \times P \rightarrow A, \quad f(x, p) = i(x) + j(p)$$

es una isogenia, con núcleo $\ker f = \{(x, -x) : x \in X \cap P\}$.

Además, si denotamos por $\lambda_{X \times P}$ la polarización inducida en $X \times P$ por λ_A , se tiene que $\lambda_{X \times P}$ es la polarización producto $\lambda_X \times \lambda_P$ y por lo tanto $K(\lambda_{X \times P}) = K(\lambda_X) \times K(\lambda_P)$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que se satisface lo siguiente.

$$\lambda_{X \times P} = \widehat{f} \circ \lambda_A \circ f = \begin{pmatrix} \widehat{i} \circ \lambda_A \circ i & \widehat{i} \circ \lambda_A \circ j \\ \widehat{j} \circ \lambda_A \circ i & \widehat{j} \circ \lambda_A \circ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_X & 0 \\ 0 & \lambda_P \end{pmatrix}$$

De aquí se sigue que $\lambda_{X \times P}$ es la polarización producto $\lambda_X \times \lambda_P$ (en particular, isogenia) y por lo tanto $K(\lambda_{X \times P}) = K(\lambda_X) \times K(\lambda_P)$ es un grupo finito.

Además es claro que $\ker f = \{(x, -x) : x \in X \cap P\}$ y que este es un subgrupo (maximal isotrópico) de $K(\lambda_{X \times P})$, por lo tanto finito. \square

Curvas y Variedades de Prym generalizadas

Sean \tilde{C} y C dos superficies de Riemann compactas de géneros \tilde{g} y g respectivamente, y $f : \tilde{C} \rightarrow C$ un cubrimiento (posiblemente ramificado) de grado d .

Denotaremos por (J, λ) y $(\tilde{J}, \tilde{\lambda})$ los Jacobianos principalmente polarizados de C y \tilde{C} , respectivamente. Entonces f induce dos homomorfismos entre estos Jacobianos, dados por

$$J \xrightarrow{f^*} \tilde{J} \qquad \tilde{J} \xrightarrow{\text{Nm } f} J$$

$$\mathcal{O}_C(D) \dashrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{C}}(f^{-1}(D)) \qquad \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{D}) \dashrightarrow \mathcal{O}_C(f(\tilde{D}))$$

Si recordamos la definición y consecuencias de la forma real de una variedad abeliana polarizada (c.f. Sección 2.4), se tiene que $\text{Nm } f : \tilde{J} \rightarrow J$ es f_1 , la inducida por f en homología. También notemos que la polarización principal de cada Jacobiano es inducida por la forma de intersección como forma bilineal anti-simétrica en $H_1(\bullet, \mathbb{Z})$, y que $H_1(\bullet, \mathbb{Z})^\perp = H_1(\bullet, \mathbb{Z})$, de acuerdo a lo observado al comienzo del capítulo 3.

Además, si f_2 es la inducida por f en cohomología, se puede definir $f^* : J \rightarrow \tilde{J}$ como $f^* = \hat{\lambda}^{-1} \circ f_2 \circ \lambda$, y resulta ser la adjunta de $\text{Nm } f$ con respecto a la forma de intersección: para todo $c \in H_1(C, \mathbb{R})$ y $\tilde{c} \in H_1(\tilde{C}, \mathbb{R})$ se tiene

$$\langle c, \text{Nm } f(\tilde{c}) \rangle_C = \langle f^*(c), \tilde{c} \rangle_{\tilde{C}}$$

Proposición 4.1. *Si $f : \tilde{C} \rightarrow C$ es un cubrimiento de grado d , entonces se tiene*

1. $\text{Nm } f \circ f^* = d_J$
2. $\widehat{\text{Nm } f} = \tilde{\lambda} \circ f^* \circ \lambda^{-1}$ o, equivalentemente, $\lambda \circ \text{Nm } f = \hat{f}^* \circ \tilde{\lambda}$
3. $(\ker \text{Nm } f)_0 = (\ker(f^* \circ \text{Nm } f))_0$.

Nótese que 1) y 2) son equivalentes a la conmutatividad del siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & d_J & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 J & \xrightarrow{f^*} & \tilde{J} & \xrightarrow{\text{Nm } f} & J \\
 \lambda \downarrow & & \tilde{\lambda} \downarrow & & \downarrow \lambda \\
 \hat{J} & \xrightarrow{\widehat{\text{Nm } f}} & \hat{\tilde{J}} & \xrightarrow{\hat{f}^*} & \hat{J}
 \end{array}$$

La siguiente caracterización de la inyectividad de f^* (c.f. [L-B, p. 337]) nos será útil.

Proposición 4.2. *Dado un cubrimiento de superficies de Riemann $f : \tilde{C} \rightarrow C$, el homomorfismo inducido $f^* : JC \rightarrow J\tilde{C}$ no es inyectivo si y sólo si f factoriza via un cubrimiento cíclico no-ramificado f' de grado ≥ 2 como en el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} & \xrightarrow{f} & C \\ & \searrow f'' & \nearrow f' \\ & & C' \end{array}$$

Observación 4.1. De la demostración de esta proposición se deduce que $\ker f'^*$ es cíclico de orden igual al grado de f' ; por lo tanto si f''^* es inyectiva, entonces $\ker f^*$ es cíclico de orden igual al grado de f' . Si f''^* no es inyectiva, se puede factorizar nuevamente, y así concluimos que $\ker f^*$ es finito.

4.1. Variedades de Prym

Definición 4.3. Para un cubrimiento $f : \tilde{C} \rightarrow C$ de grado d , definimos la *variedad de Prym del cubrimiento* por

$$P = P(f) = P(\tilde{C}/C) = (\ker(\widehat{f^* \circ \tilde{\lambda}}))_0$$

Teorema 4.4. *Sea $f : \tilde{C} \rightarrow C$ un cubrimiento de superficies de Riemann de grado d .*

Denotamos por $\tilde{\lambda}_{f^(J)}$ y por $\tilde{\lambda}_P$ las polarizaciones inducidas por $\tilde{\lambda}$ en $f^*(J)$ y en P , respectivamente. Entonces se tiene.*

1. $P = (\ker \text{Nm } f)_0 = (\ker(f^* \circ \text{Nm } f))_0$;
2. $P = P(\tilde{J}, \tilde{\lambda}, f^*(J))$; i.e., P es el complemento ortogonal del subtoro $f^*(J)$ de la p.p.a.v. $(\tilde{J}, \tilde{\lambda})$;
3. la polarización en J inducida por $\tilde{\lambda}_{f^*(J)}$ via f^* es $d\lambda$ y $H_0 := \ker f^* \subset J[d]$ es isotrópico con respecto a la forma de Weil asociada a $d\lambda$;
4. f^* induce un isomorfismo de H_0^\perp/H_0 a $\ker(\lambda_{f^*(J)}) = \ker(\lambda_P) = f^*J \cap P \subset P[d]$, donde la ortogonalidad es con respecto a la forma multiplicativa antisimétrica $e_{d\lambda}$ en $J[d]$, y

$$|f^*J \cap P| = \frac{|J[d]|}{|\ker f^*|^2}.$$

5. Consideremos la isogenia

$$\phi : J \times P \rightarrow \tilde{J}, \quad \phi(c, \tilde{c}) = f^*(c) + \tilde{c}$$

y la proyección sobre el primer factor $\pi_1 : J \times P \rightarrow J$. Sea $H_1 = \pi_1(\ker \phi)$.

Entonces $\ker \phi = \{(c, -f^*(c)) : c \in J[d] \text{ y } f^*(c) \in P\}$ es isomorfo a H_1 ; además, $H_1 = H_0^\perp$ y

$$|\ker \phi| = |H_1| = |H_0^\perp| = \frac{|J[d]|}{|\ker f^*|}.$$

DEMOSTRACIÓN. 1. De la proposición 4.1 tenemos que $(\ker(\widehat{f^* \circ \tilde{\lambda}}))_0 = (\ker(\lambda \circ \text{Nm } f))_0 = (\ker(\text{Nm } f))_0$.

La otra igualdad sigue también de la proposición 4.1.

2. Denotamos por $i : f^*(J) \rightarrow \tilde{J}$ y por $j : P = P(f) \rightarrow \tilde{J}$ las respectivas inclusiones, por $f_1 : J \rightarrow f^*(J)$ la isogenia tal que $f^* = i \circ f_1$ y consideramos el diagrama siguiente (f_1 es isogenia pues $\ker f^* = \ker f_1$ y $\ker f^*$ es finito por la Observación 4.1).

$$\begin{array}{ccccc}
& & f^* & & \\
& \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
J & \xrightarrow{f_1} & f^*(J) & \xrightarrow{i} & \tilde{J} & \xleftarrow{j} & P \\
& & & & \downarrow \tilde{\lambda} & & \\
\hat{J} & \xleftarrow{\hat{f}_1} & \widehat{f^*(J)} & \xleftarrow{\hat{i}} & \hat{\tilde{J}} & \xrightarrow{\hat{j}} & \hat{P} \\
& & \widehat{f^*} & & & &
\end{array}$$

De la demostración del corolario 1.15 sabemos que $(\ker \widehat{f^*})_0 = \ker \hat{i}$. Entonces se tiene $P = (\ker(\widehat{f^*} \circ \tilde{\lambda}))_0 = \tilde{\lambda}^{-1}((\ker \widehat{f^*})_0) = \tilde{\lambda}^{-1}(\ker \hat{i}) = P(\tilde{J}, \tilde{\lambda}, f^*(J))$.

3. El diagrama de más arriba también muestra que la polarización inducida en J por $\tilde{\lambda}_{f^*(J)}$ via f_1 está dada por $\hat{f}_1 \circ \tilde{\lambda}_{f^*(J)} \circ f_1 = \hat{f}_1 \circ \hat{i} \circ \tilde{\lambda} \circ i \circ f_1 = \widehat{f^*} \circ \tilde{\lambda} \circ f^* = \lambda \circ \text{Nm } f \circ f^* = d\lambda$.
4. Ahora podemos completar el diagrama anterior con las polarizaciones inducidas.

$$\begin{array}{ccccc}
& & f^* & & \\
& \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
J & \xrightarrow{f_1} & f^*(J) & \xrightarrow{i} & \tilde{J} & \xleftarrow{j} & P \\
\downarrow d\lambda & & \downarrow \lambda_{f^*(J)} & & \downarrow \tilde{\lambda} & & \downarrow \lambda_P \\
\hat{J} & \xleftarrow{\hat{f}_1} & \widehat{f^*(J)} & \xleftarrow{\hat{i}} & \hat{\tilde{J}} & \xrightarrow{\hat{j}} & \hat{P} \\
& & \widehat{f^*} & & & &
\end{array}$$

Ahora se sigue de la teoría de descenso (c.f. [MB] p. 117) que $f_1 : J \rightarrow f^*J$ induce un isomorfismo de H_0^\perp/H_0 a $\ker(\lambda_{f^*J})$ y que $H_0^\perp = f_1^{-1}(\ker \lambda_{f^*J})$. Pero ya sabemos (Observación 3.1) que $\ker(\lambda_{f^*J}) = \ker(\lambda_P) = f^*J \cap P$. Notemos ahora que $y \in f^*J \cap P$ si y sólo si y pertenece a P e $y = f^*(x)$ para algún $x \in J$. Pero entonces $0 = \text{Nm } f(y) = \text{Nm } f(f^*(x)) = dx$.

La demostración de la igualdad siguiente concluye la prueba de (4).

$$(4.1) \quad |H_0| = \frac{|J[d]|}{|H_0^\perp|}$$

Esta igualdad es inmediata si consideramos la isogenia f_1 definida en la demostración de (2) como dada por $J = V/L$ y $f^*J = V/M$, con $L \subset M$ reticulados en V , y notamos que $H_0 = M/L$, $K(\lambda_{f^*J}) = M^\perp/M$, $H_0^\perp = M^\perp/L \subseteq J[d] = K(d\lambda) = L^\perp/L$, y que el índice de L en M es igual al índice de M^\perp en L^\perp , ya que de la sucesión exacta siguiente

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & H_0 = M/L & \hookrightarrow & H_0^\perp = M^\perp/L & \twoheadrightarrow & K(\lambda_{f^*J}) = M^\perp/M \rightarrow 0 \\
& & & & \downarrow & & \\
& & & & J[d] = K(d\lambda) = L^\perp/L & &
\end{array}$$

$$\text{obtenemos } |H_0| = \frac{|H_0^\perp|}{|K(\lambda_{f^*J})|} = [M : L] = [L^\perp : M^\perp] = \frac{|J[d]|}{|H_0^\perp|}$$

5. Es claro que $\ker \phi \subset J[d] \times P[d]$ y por lo tanto ϕ es una isogenia. También es claro que $s : H_1 = \pi_1(\ker \phi) \rightarrow \ker \phi$ definida por $s(c) = (c, -f^*(c))$ es una sección de π_1 en H_1 ($\pi_1 \circ s = \text{Id}_{H_1}$); se sigue que $\pi_1 : \ker \phi \rightarrow H_1$ es un isomorfismo.

Pero también vale

$$H_1 = \{c \in J : f^*(c) \in P\} = (f^*)^{-1}(f^*J \cap P) = H_0^\perp.$$

Por lo tanto $|\ker \phi| = |H_0^\perp|$, lo que junto con la igualdad (4.1) completa la demostración de (5) y del Teorema. \square

Lema 4.5. *Sea $f : \tilde{C} \rightarrow C$ un cubrimiento de curvas de grado d . Entonces el número de componentes conexas de $\ker \text{Nm } f$ es igual a la cardinalidad de $\ker f^*$.*

En particular, si d es primo y f es ramificado, o si d es primo y f no es un cubrimiento cíclico, entonces $\ker \text{Nm } f$ es conexo.

DEMOSTRACIÓN. Como f^* y $\text{Nm } f$ son duales, podemos aplicar el Corolario 1.15 para concluir que el número de componentes conexas de $\ker \text{Nm } f$ es la cardinalidad de $\ker f^*$.

Los casos particulares mencionados implican que f^* es inyectiva, por la Proposición 4.2, y el resultado sigue. \square

El siguiente resultado es evidente y útil.

Lema 4.6. *Supongamos que A, B, C son grupos y*

$$\begin{array}{ccc} & \text{h} = g \circ f & \\ & \curvearrowright & \\ A & \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C & \end{array}$$

son homomorfismos, donde f y g tienen núcleo finito.

Entonces h tiene núcleo finito y además se tiene:

1. $\ker h = f^{-1}(f(A) \cap \ker g)$
- 2.

$$|\ker h| = |\ker f| |f(A) \cap \ker g|$$

El próximo resultado muestra la relación entre la variedad de Prym de un cubrimiento que factoriza y las variedades de Prym de los cubrimientos intermedios.

Proposición 4.7. *Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ dos cubrimientos de curvas y sea $h = g \circ f : X \rightarrow Z$. Entonces hay dos isogenias naturales dadas como sigue.*

$$\text{ps} : P(Y/Z) \times P(X/Y) \rightarrow P(X/Z), \quad \text{ps}(y, x) = f^*y + x$$

y

$$\psi : JZ \times P(Y/Z) \times P(X/Y) \rightarrow JX, \quad \psi(z, y, x) = h^*z + f^*y + x.$$

Además se tiene

- i) *El núcleo de ps está contenido en $P(Y/Z)[\deg f] \times P(X/Y)[\deg f]$, y su cardinalidad está dada por la expresión siguiente*

$$|\ker \text{ps}| = |P(Y/Z)[\deg f]| \frac{|g^*(JZ) \cap \ker f^*|}{|\ker f^*|}.$$

ii) El núcleo de ψ tiene cardinalidad

$$|\ker \psi| = \frac{|JY[\deg f]| |JZ[\deg g]|}{|\ker f^*| |\ker g^*|} = \frac{|JZ[\deg h]| |P(Y/Z)[\deg f]|}{|\ker f^*| |\ker g^*|}.$$

DEMOSTRACIÓN.

Paso 1: Primero probaremos que la imagen de ps está contenida en $P(X/Z)$.

Sean x en $P(X/Y)$ e y en $P(Y/Z)$. Entonces

$$\begin{aligned} \text{Nm } h(\text{ps}(y, x)) &= \text{Nm } h(x) + \text{Nm } h(f^*y) \\ &= \text{Nm } g(\text{Nm } f(x)) + \text{Nm } g(\text{Nm } f(f^*y)) \\ &= \text{Nm } g(0) + \text{Nm } g((\deg f) y) \\ &= (\deg f) \text{Nm } g(y) = 0, \end{aligned}$$

lo que muestra que $\text{ps}(P(Y/Z) \times P(X/Y)) \subset \ker \text{Nm } h$. Pero como $P(Y/Z) \times P(X/Y)$ es conexo y contiene a $(0, 0)$ se sigue que $\text{ps}(P(Y/Z) \times P(X/Y)) \subset (\ker \text{Nm } h)_\circ = P(X/Z)$.

Paso 2: Ahora veamos que el núcleo de ps está contenido en $P(Y/Z)[\deg f] \times P(X/Y)[\deg f]$.

Como se tiene que $f^*y + x = 0$ para $(y, x) \in \ker \text{ps}$, entonces $0 = \text{Nm } f(f^*y) + \text{Nm } f(x) = (\deg f) y$, de donde $y \in P(Y/Z)[\deg f]$. Así obtenemos $\ker \text{ps} \subset \{(y, -f^*y) : y \in P(Y/Z)[\deg f]\}$, lo que demuestra la primera parte de i).

Paso 3: ψ es una isogenia.

Del Teorema 4.4 se deduce que tenemos isogenias

$$\begin{aligned} \alpha : JY \times P(X/Y) &\rightarrow JX, \quad (y, x) \rightarrow f^*y + x, \\ \beta : JZ \times P(Y/Z) &\rightarrow JY, \quad (z, y) \rightarrow g^*z + y, \end{aligned}$$

y

$$\gamma : JZ \times P(X/Z) \rightarrow JX, \quad (z, x) \rightarrow h^*z + x$$

cuyos respectivos núcleos tienen los tamaños siguientes:

$$|\ker \alpha| = \frac{|JY[\deg f]|}{|\ker f^*|}, \quad |\ker \beta| = \frac{|JZ[\deg g]|}{|\ker g^*|}, \quad |\ker \gamma| = \frac{|JZ[\deg h]|}{|\ker h^*|}.$$

Del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} JZ \times P(Y/Z) \times P(X/Y) & \xrightarrow{(\beta, \text{id}_{P(X/Y)})} & JY \times P(X/Y) \\ \downarrow (\text{id}_{JZ}, \text{ps}) & \searrow \psi & \downarrow \alpha \\ JZ \times P(X/Z) & \xrightarrow{\gamma} & JX \end{array}$$

obtenemos que ψ es una isogenia.

Paso 4: el cálculo para los núcleos.

También se deduce del último diagrama que

$$|\ker \psi| = |\ker \text{ps}| |\ker \gamma| = |\ker \alpha| |\ker \beta|.$$

Por lo tanto

$$|\ker \psi| = |\ker \text{ps}| \frac{|JZ[\deg h]|}{|\ker h^*|} = \frac{|JY[\deg f]| |JZ[\deg g]|}{|\ker f^*| |\ker g^*|}$$

y para completar la demostración sólo necesitamos calcular $|\ker \text{ps}|$.

La última igualdad implica que

$$|\ker \text{ps}| = \frac{|JY[\deg f]| |JZ[\deg g]|}{|JZ[\deg h]|} \frac{|\ker h^*|}{|\ker f^*| |\ker g^*|}.$$

Pero es claro que $\frac{|JY[\deg f]| |JZ[\deg g]|}{|JZ[\deg h]|} = |P(Y/Z)[\deg f]|$ y que $\ker h^* = g^{*-1}(g^*(JZ) \cap \ker f^*)$, de donde se sigue que $|\ker h^*| = |\ker g^*| |g^*(JZ) \cap \ker f^*|$. \square

4.2. Cubrimientos Galois y Variedades de Prym

Supongamos que el cubrimiento $f : \tilde{C} \rightarrow C$ es Galois; i.e., que existe un subgrupo G del grupo de automorfismos \tilde{C} tal que $C = \tilde{C}/G$ y tal que f es la proyección canónica.

Para cada $g \in G$ denotamos por el mismo símbolo g el automorfismo inducido por g en \tilde{J} , por $\langle g \rangle$ el subgrupo de G generado por g , y por \tilde{J}^H el conjunto de puntos fijos de H en \tilde{J} , para cada subgrupo H de G .

Definición 4.8. Si el cubrimiento $f : \tilde{C} \rightarrow C$ es Galois con grupo G , se define la *norma de grupo* $\text{Nm } G : \tilde{J} \rightarrow \tilde{J}$ como el endomorfismo $\text{Nm } G = \sum_{g \in G} g$.

Los siguientes resultados son inmediatos.

Proposición 4.9. Sea $f : \tilde{C} \rightarrow C = \tilde{C}/G$ un cubrimiento de Galois con grupo G de orden d y denotemos por $P = P(f)$ la correspondiente variedad de Prym.

Entonces se tiene.

- i) $f^*(J) = (\tilde{J}^G)_0$ y $\tilde{J}^G = f^*(J) + P_0$, donde $P_0 = P \cap \tilde{J}^G \subset P[d] \cap \tilde{J}^G[d]$.
- ii) Además, $f^* \circ \text{Nm } f = \text{Nm } G$, y
- iii) $P = (\ker \text{Nm } f)_0 = (\ker \text{Nm } G)_0$.

Corolario 4.10. Sea $f : \tilde{C} \rightarrow C = \tilde{C}/G$ un cubrimiento de Galois con grupo G y denotemos por $P = P(f)$ la correspondiente variedad de Prym, con la polarización inducida λ_P .

Entonces G es subgrupo del grupo de automorfismos de la variedad abeliana polarizada (P, λ_P) y también de la variedad abeliana polarizada $(f^*(J), \lambda_{f^*(J)})$. Esta última acción corresponde a la componente de la representación trivial en $T_e(\tilde{J})$.

Además la isogenia $\phi : J \times P \rightarrow \tilde{J}$ del Teorema 4.4 es G -equivariante; i.e., $\phi(gx, gp) = g\phi(x, p)$ para todo $g \in G$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $g \in G$; como $P = (\ker \text{Nm } G)_0$, entonces $g(P) \subset \ker \text{Nm } G$. Pero $g(P)$ es conexo, contiene a 0 y tiene la misma dimensión que P . Así G preserva el toro P .

Pero además la polarización de P se obtiene por restricción de la polarización de \tilde{J} , que es preservada por G . \square

Corolario 4.11. Si $f : \tilde{C} \rightarrow C$ es un cubrimiento doble dado por la involución $\sigma : \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}$ y si P denota la correspondiente variedad de Prym, entonces

$$\tilde{J}^{(\sigma)} = f^*J + P[2]$$

DEMOSTRACIÓN. De la Proposición 4.9 i) sabemos que $\tilde{J}^{(\sigma)} = f^*J + P_0$, donde $P_0 = \tilde{J}^{(\sigma)} \cap P \subset P[2]$.

Como σ es una involución, es claro que $P[2] \subset \tilde{J}^{(\sigma)}$ y el resultado sigue. \square

El siguiente resultado aparece en **[Rec-Ro]**; su corolario nos será muy útil.

Lema 4.12. *Sea $f : \tilde{C} \rightarrow C = \tilde{C}/G$ un cubrimiento de Galois de grado d , sea H un subgrupo de G y denotemos por $h : \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}/H$ y por $g : \tilde{C}/H \rightarrow C$ los correspondientes cubrimientos, como en el diagrama siguiente.*

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{C} & \\ & \swarrow h & \downarrow f \\ \tilde{C}/H & & C = \tilde{C}/G \\ & \searrow g & \end{array}$$

Sea $\{g_1H, g_2H, \dots, g_rH\}$ un conjunto completo de representantes de las co-clases de H en G . Entonces

1. $\text{Nm } G = \left(\sum_{i=1}^r g_i \right) \circ \text{Nm } H$, y
2. $\sum_{i=1}^r g_i(h^*(z)) = f^*(\text{Nm } g(z))$ para todo $z \in J(\tilde{C}/H)$.

DEMOSTRACIÓN. La primera igualdad es evidente.

La segunda sigue de la primera, pues $f^* \circ \text{Nm } g \circ \text{Nm } h = f^* \circ \text{Nm } f = \text{Nm } G = \sum_{i=1}^r g_i \circ \text{Nm } H = \left(\sum_{i=1}^r g_i \right) \circ h^* \circ \text{Nm } h$ y además se tiene que $\text{Nm } h : J\tilde{C} \rightarrow J(\tilde{C}/H)$ es sobreyectiva. \square

Corolario 4.13. *Bajo las hipótesis del Lema 4.12,*

$$h^*(P(g)) = \left\{ x \in \tilde{J}^H : \sum_{i=1}^r g_i(x) = 0 \right\}_\circ .$$

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por A el lado derecho de la igualdad que demostraremos.

Paso 1: $h^*(P(g))$ está contenido en A . De la Proposición 4.9 i) sabemos que $h^*(J(\tilde{C}/H))$ es la componente conexa que contiene a cero de \tilde{J}^H , y por lo tanto $h^*(P(g))$ está contenido en \tilde{J}^H .

Si $z \in P(g)$, entonces $\text{Nm } f(h^*z) = |H| \text{Nm } g(z) = 0$; i.e. $h^*(P(g)) \subset \ker \text{Nm } f$. Por la Proposición 4.9 ii) sabemos que $\ker \text{Nm } f \subset \ker \text{Nm } G$, y además tenemos que

$$\text{Nm } G = \sum_{p \in G} p = \sum_i g_i \left(\sum_{k \in H} k \right), \text{ de donde } \text{Nm } G|_{\tilde{J}^H} = |H| \sum_i g_i; \text{ por lo tanto } h^*(P(g)) \subset \ker \left(|H| \sum_i g_i \right). \text{ Como } P(g) \text{ es conexo, obtenemos que } h^*(P(g)) \subset A.$$

Paso 2: Al revés, sea $x \in A$. Entonces x is H -invariant y $\sum_i g_i(x) = 0$. Entonces $\text{Nm } G(x) =$

$$\sum_i g_i \left(\sum_{k \in H} k \right) (x) = |H| \sum_i g_i(x) = 0; \text{ aplicando la Proposición 4.9 iii) y sabiendo que } A$$

es conexo, se obtiene que $A \subset (\ker \text{Nm } f)_\circ$.

Por lo tanto $\text{Nm } h(A) \subset (\ker \text{Nm } g)_\circ = P(g)$. Pero entonces $|H|A = \sum_{k \in H} k(A) = h^*(\text{Nm } h(A)) \subset h^*(P(g))$ y hemos probado la afirmación. \square

4.2.1. Cubrimientos Galois no ramificados. En esta sección seguiremos las ideas de [Ri]. Sea $f : \tilde{C} \rightarrow C = \tilde{C}/G$ un cubrimiento cíclico no ramificado. Entonces los homomorfismos inducidos en π_1 y en H_1 inducen el siguiente diagrama conmutativo, donde c denota el subgrupo conmutador, y donde todas las filas y columnas son exactas.

$$(4.2) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & K \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & H \\ 0 & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{C}, p)^c & \longrightarrow & \pi_1(C, f(p))^c & \longrightarrow & H \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{C}, p) & \longrightarrow & \pi_1(C, f(p)) & \longrightarrow & G \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{L} & \longrightarrow & H_1(\tilde{C}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_1(C, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Persiguiendo el diagrama se obtiene $G^c \approx H/K$ y

$$\mathcal{L} \approx K \approx \left(\pi_1(C, f(p))^c \cap f(\pi_1(\tilde{C}, p)) \right) / f(\pi_1(\tilde{C}, p)^c)$$

Así $G_1 \approx G/G^c$ es el cociente maximal abeliano de G .

De ahora en adelante supondremos (en esta sección) que G es *abeliano*. Entonces $G = G_1$, $H = K$ y $\pi_1(C, f(p))^c \subset f(\pi_1(\tilde{C}, p))$.

Ahora utilizaremos la notación de la sección 2.4.

Sea $\Lambda = f(H_1(\tilde{C}, \mathbb{Z}))$; entonces Λ es un subreticulado de $H_1(C, \mathbb{Z})$, con cociente $H_1(C, \mathbb{Z})/\Lambda \approx G$. Además, Λ^\perp es un reticulado en $H_1(C, \mathbb{R})$ que contiene a $H_1(C, \mathbb{Z}) = H_1(C, \mathbb{Z})^\perp$, y, como la forma de intersección es no degenerada, hay un isomorfismo natural de $\Lambda^\perp/H_1(C, \mathbb{Z})$ al grupo dual de G : $\hat{G} = \text{Hom}(G, S^1)$ (los caracteres de G).

Observación 4.2. Nótese que en la construcción recién hecha hemos logrado exhibir \hat{G} como un subgrupo de J .

Más generalmente se tiene el siguiente resultado (c.f. [Ri, p. 63]).

Proposición 4.14. *Hay una biyección entre los cubrimientos abelianos no ramificados de C con grupo de Galois G y las inyecciones $\widehat{G} \rightarrow JC$.*

Observación 4.3. Nótese que también se obtiene una manera de construir el cubrimiento: si h_1, \dots, h_k es una base de \widehat{G} , entonces cada h_j se puede representar como $\frac{1}{n_j} \gamma_j$ para algún n_j entero positivo y algún $\gamma_j \in H_1(C, \mathbb{Z})$.

Entonces un lazo $\alpha \in \pi_1(C, f(p))$ se levanta a una curva cerrada en p en \widetilde{C} (es decir, pertenece a $f(\pi_1(\widetilde{C}, p))$) si y sólo si $\langle \alpha, \gamma_j \rangle_C \equiv 0 \pmod{n_j}$ para todo j .

También se tiene lo siguiente (c.f. [A]).

Lema 4.15. $\widehat{G} = \ker f^*$.

DEMOSTRACIÓN. Nótese que $\lambda \in \Lambda^\perp$ si y sólo si $\langle \lambda, \alpha \rangle_C \in \mathbb{Z}$ para todo $\alpha \in \Lambda$ si y sólo si $\langle \lambda, \text{Nm } f(\beta) \rangle_C = \langle f^*(\lambda), \beta \rangle_{\widetilde{C}}$ pertenece a \mathbb{Z} para todo $\beta \in H_1(\widetilde{C}, \mathbb{Z})$. Pero esto último es claramente equivalente a $f^*(\lambda) \in H_1(\widetilde{C}, \mathbb{Z})^\perp = H_1(\widetilde{C}, \mathbb{Z})$. \square

Observación 4.4. Nótese que hemos mostrado también que $f^*(J)$ es un subtoro de \widetilde{J} con forma real $H_1(C, \mathbb{R})/\Lambda^\perp$, y que la forma real de la inclusión de $f^*(J)$ en \widetilde{J} es $f : H_1(C, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(\widetilde{C}, \mathbb{R})$. También se tiene

$$K(\lambda_{f^*(J)}) = \{\alpha \in H_1(C, \mathbb{R}) : \langle f^*(\alpha), f^*(\gamma) \rangle_{\widetilde{C}} \in \mathbb{Z} \text{ para todo } \gamma \in \Lambda^\perp\} / \Lambda^\perp$$

Pero

$$\langle f^*(\alpha), f^*(\gamma) \rangle_{\widetilde{C}} = \langle \alpha, \text{Nm } f(f^*(\gamma)) \rangle_C = d \langle \alpha, \gamma \rangle_C$$

Por lo tanto

$$K(\lambda_{f^*(J)}) = (\Lambda^\perp)^{\perp d\lambda_C} / \Lambda^\perp = ((\Lambda^\perp)^{\perp d\lambda_C} / \Lambda) / (\Lambda^\perp / \Lambda) = \widehat{G}^{\perp d\lambda_C} / \widehat{G}$$

Además se tiene (del Diagrama (4.2)) que la forma real de $P = P(f)$ es $\mathcal{L} \otimes \mathbb{R}/\mathcal{L}$.

Como G preserva \mathcal{L} y la polarización de \widetilde{J} , se obtiene que G se restringe a un grupo de automorfismos e la variedad polarizada P .

Proposición 4.16. *Sea $f : \widetilde{C} \rightarrow C = \widetilde{C}/G$ un cubrimiento cíclico no ramificado. Entonces \widetilde{J}^G es conexo; i.e., $\widetilde{J}^G = f^*J$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es de grado d y sea α un generador del grupo G que define el cubrimiento; entonces

$$\widetilde{J}^G = \ker(1 - \alpha).$$

Si denotamos por \widetilde{g} y por g los respectivos géneros de \widetilde{C} y C , entonces se tiene que $\widetilde{g} = dg + 1 - d$. Se sigue de [F] (ver Figura 4.1) que para un cubrimiento cíclico no ramificado existen bases simplécticas $\{\widetilde{\lambda}_1, \dots, \widetilde{\lambda}_{2\widetilde{g}}\}$ de $H_1(\widetilde{C}, \mathbb{Z})$ y $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}\}$ de $H_1(C, \mathbb{Z})$ tales que

1. $\text{Nm } f(\widetilde{\lambda}_g) = \lambda_g$ y $\text{Nm } f(\widetilde{\lambda}_{2\widetilde{g}}) = d\lambda_{2g}$;
2. $f^*(\lambda_i) = \sum_{j=0}^{d-1} \widetilde{\lambda}_{i+j(g-1)}$ para $i \in \{1, \dots, g-1\}$ y para $i \in \{\widetilde{g}+1, \dots, \widetilde{g}+g-1\}$; y además

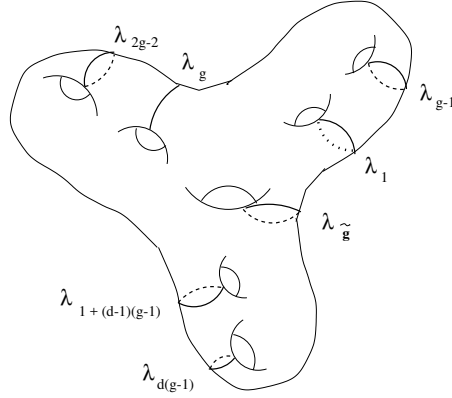


FIGURA 4.1

3.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \tilde{\lambda}_i \xrightarrow{\alpha} \tilde{\lambda}_{i+g-1} \xrightarrow{\alpha} \tilde{\lambda}_{i+2(g-1)} \xrightarrow{\alpha} \dots \xrightarrow{\alpha} \tilde{\lambda}_{i+(d-1)(g-1)} \end{array}$$

para $i \in \{1, \dots, g-1\}$ y para $i \in \{\tilde{g}+1, \dots, \tilde{g}+g-1\}$.

Dicho de otra manera, podemos suponer que $\ker f^*$ está generado por $\frac{1}{d}\lambda_{2g}$. Pero entonces

$$\begin{aligned} \ker(1 - \alpha) &= f^*(J) \\ &= \langle \tilde{\lambda}_{\tilde{g}}, \tilde{\lambda}_{2\tilde{g}}, \sum_{j=0}^{d-1} \tilde{\lambda}_{i+j(g-1)} : i \in \{1, \dots, g-1\} \cup \{\tilde{g}+1, \dots, \tilde{g}+g-1\} \rangle \end{aligned}$$

Supongamos que f es de grado d y sea α un generador del grupo G que define el cubrimiento; entonces $\tilde{J}^G = \ker(1 - \alpha)$. Que \mathcal{L} esté en $\ker(1 - \alpha)$ quiere decir que existe un isomorfismo $\phi : \mathcal{L} \rightarrow \alpha(\mathcal{L})$. Pero entonces $(\alpha^{-1}\phi)^d$ es un automorfismo de \mathcal{L} , y por lo tanto igual a una constante c distinta de cero; ajustando la constante, obtenemos un isomorfismo $\phi_1 = \sqrt[d]{c}$ de \mathcal{L} en si mismo de orden d . Por lo tanto G actúa en \mathcal{L} ; i.e., G es linealizable y se sigue de [M2] que entonces \mathcal{L} está en f^*J . \square

Estructura real

5.1. Variedades abelianas y su estructura real

En este capítulo consideraremos la estructura real asociada a una variedad abeliana principalmente polarizada \mathbf{A} de género g , dada por $(T = V/L, H)$.

Definición 5.1. Sea \mathbf{A} una variedad abeliana principalmente polarizada de género g , dada por $(T = V/L, H)$, con bases v_1, \dots, v_g de V y f_1, \dots, f_{2g} de L ; Π denota la matriz período.

Entonces la estructura real asociada a \mathbf{A} está dada por el par $(\mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}, \phi)$, donde $\mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}$ es un toro real de dimensión $2g$ y $\phi : \mathbb{R}^{2g} \rightarrow V$ es la función dada por $\phi(x) = \Pi x$, con x un vector columna en \mathbb{R}^{2g} y Πx las coordenadas de $\phi(x)$ con respecto a la base dada de V .

Nótese que entonces $x = P^{-1} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$.

En el toro real asociado a cada estructura real hay una estructura compleja, dada por $R = P^{-1} \circ M \circ P$, donde $M = \begin{pmatrix} iI_g & 0 \\ 0 & -iI_g \end{pmatrix}$.

Se tiene el siguiente

Lema 5.2 (Siegel). *Si R es la estructura compleja canónica de una estructura real, entonces se tiene:*

- $R^2 = -I_{2g}$,
- $R'J$ es real positiva definida y
- $R'J + iJ$ en $M(2g \times 2g, \mathbb{R})$ es la matriz de H con respecto a la base de L , donde J es la matriz de la forma alternada $E = \text{Im}(H)$.

Ejemplo 5.1. *género uno*

Para $\tau = r + it$, $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ está dada por $z = \phi(x) = x_1 + \tau x_2 = x_1 + r x_2 + i t x_2$ y R está dada por $R = \begin{pmatrix} -\frac{r}{t} & -\frac{r^2+t^2}{t} \\ \frac{1}{t} & \frac{r}{t} \end{pmatrix}$.

5.2. Automorfismos y estructura real

Recordemos que para un automorfismo f de una variedad abeliana principalmente polarizada tenemos una representación analítica $a = \rho_a(f)$ en $M(g \times g, \mathbb{C})$ y una representación racional $r = \rho_r(f)$ en $M(2g \times 2g, \mathbb{Z})$.

Como sabemos, estas dos matrices están relacionadas por

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} P = Pr.$$

Se tiene el siguiente

Lema 5.3. *Bajo las condiciones mencionadas, $Rr = rR$.*

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}r^{-1}Rr &= (P^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}^{-1} P)(P^{-1}MP)(P^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} P) \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}^{-1} M \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} P \\ &= P^{-1}MP \\ &= R.\end{aligned}$$

□

Bibliografía

- [A] R. D. M. Accola, *Riemann surfaces, Theta-functions, and abelian automorphism groups*, Lecture Notes in Mathematics **483**. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [F] J. D. Fay, *Theta functions on Riemann surfaces*, Lecture Notes in Mathematics **352**. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [L-B] H. Lange and C. Birkenhake, *Complex Abelian Varieties*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **302**. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [MB] L. Moret-Bailly, *Familles de courbes et des variétés abéliennes sur \mathbb{P}_1* , Asterisque **86** (1981), 109–124.
- [M1] D. Mumford, *Abelian Varieties*, Oxford University Press, 1970.
- [M2] D. Mumford, *Prym Varieties I*, Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers), pp. 325–350. Academic Press, New York, 1974.
- [Rec-Ro] S. Recillas and R. E. Rodríguez, *Jacobians and Representations of S_3* , Aportaciones Mat. **13** (1998), 117–140.
- [Ri] J. Ries, *The Prym variety for a cyclic unramified cover of a hyperelliptic Riemann surface*, J. Reine Angew. Math. **340** (1983), 59–69.

Parte 2

Grupos Kleinianos y Variedades Abelianas

RESUMEN. Esta parte tiene por objeto dar algunas ideas básicas sobre grupos discretos de automorfismos holomorfos y antiholomorfos de la esfera de Riemann y sus relaciones con variedades abelianas. En el capítulo 6 se introducirán conceptos básicos como: discontinuidad, discretitud, superficies de Klein y su conexión con geometría hiperbólica tres dimensional. Luego usaremos este tipo de grupos para mirar algunas conexiones con variedades abelianas. La primera conexión será dada en el capítulo 7 donde daremos una versión de grupos Kleinianos del teorema de Torelli que dice que las superficies de Riemann están determinadas por sus variedades abelianas (Jacobianas). En el capítulo 8 veremos la segunda conexión; el uso de uniformizaciones por grupos de Schottky de superficies de Riemann. En particular, miraremos aquellas superficies de Riemann que admiten una reflexión con puntos fijos y veremos como uniformizarlas por grupos de Schottky que preservan círculos Euclidianos. El hecho que estas superficies pueden ser uniformizadas por este tipo de grupos es un resultado de B. Maskit [**Maskit3**]. Luego recordaremos algunas observaciones de Burnside [**Burnside**] para ver como utilizar tales grupos para calcular en forma explícita sus matrices de Riemann. En el capítulo 9 estudiaremos las superficies de Riemann maximal simétricas. Estas superficies son definidas por el hecho de tener una reflexión con puntos fijos tal que el grupo de automorfismos que conmutan con ella es maximal. Miraremos los géneros bajos y calcularemos sus matrices de Riemann usando las herramientas del segundo capítulo. En el capítulo 10 miraremos algunas propiedades de variedades hiperbólicas tres-dimensionales en forma muy superficial.

Como existen muchas referencias clásicas y nuevas en torno al tópico de grupos Kleinianos, superficies de Riemann, geometría hiperbólica, no intentaremos mostrar en demasiado detalle estos tópicos. Una buena lista de libros que el lector puede revisar como parte complementaria importante a estas notas son por ejemplo: [**Abikoff**], [**Benedetti-Petronio**], [**Beardon**], [**Farkas-Kra**], [**Ford**], [**Maskit1**], [**Ractliffe**].

Grupos Kleinianos

6.1. Superficies de Klein

Denotemos por $\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0\}$, la clausura Euclideana del semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$.

Una *superficie de Klein* es un espacio topológico Hausdorff X , segundo numerable, junto a una colección de coordenadas (un *atlas dianalítico*) $\mathcal{F} = \{(U_j, z_j) : j \in J\}$ donde

- (1) U_j es un abierto de X , para todo $j \in J$;
- (2) $z_j : U_j \rightarrow z_j(U_j) \subset \overline{\mathbb{H}}$ es un homeomorfismo sobre el abierto $z_j(U_j)$ de $\overline{\mathbb{H}}$, para todo $j \in J$;
- (3) Si $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, para $j, k \in J$, entonces $z_k z_j^{-1} : z_j(U_j \cap U_k) \rightarrow z_k(U_j \cap U_k)$ es una función analítica o antianalítica (es decir, son la restricción de una función analítica o antianalítica en el sentido usual).

Una superficie real X para la cual su sistema de cartas sólo tienen cambios de coordenadas funciones analíticas (un *atlas analítico*) es llamada una *superficie de Riemann*. Aquellos puntos p de la superficie de Klein X que tienen una coordenada $(U_j, z_j) \in \mathcal{F}$ tal que $p \in U_j$ y $z_j(p) \in \mathbb{R}$, son llamados puntos de la frontera de X . El borde de X , denotado por ∂X , es la unión de tales puntos. Luego, nuestra definición de superficie de Klein permite tener bordes.

Ejercicio.

- 1.- Verificar que toda superficie de Klein es una variedad real de dimensión dos (es decir, una superficie real) con estructura real analítica.
- 2.- Verificar que toda superficie de Riemann es una superficie orientable.
- 3.- Suponiendo que no hay puntos en el borde en una superficie de Klein, mostrar que basta con suponer que la imágenes $z_j(U_j)$ sean abiertos del plano complejo.

6.2. Ejemplo de Superficie de Klein

- (1) Todo subconjunto abierto Ω del plano complejo es una superficie de Klein. En este caso, un atlas analítico es dado por $\mathcal{F} = \{(\Omega, I)\}$, donde $I(z) = z$, obteniendo así una superficie de Riemann. Observemos que si usamos el atlas $\mathcal{F} = \{(\Omega, I), (\Omega, J)\}$, donde $J(z) = \bar{z}$, entonces tenemos un atlas dianalítico.
- (2) La esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. La *esfera de Riemann* $\widehat{\mathbb{C}}$ es la variedad compleja de dimensión compleja uno (luego, una superficie de Riemann) obtenida por compactificación del plano complejo \mathbb{C} , es decir, el conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con la topología generada por los abiertos usuales en \mathbb{C} y los conjuntos de la forma $K \cup \{\infty\}$, donde K recorre los subconjuntos compactos de \mathbb{C} , y las cartas complejas $(U = \mathbb{C}, I : U \rightarrow \mathbb{C} : z \rightarrow z)$ y $(V = \widehat{\mathbb{C}} - \{0\}, J : V \rightarrow \mathbb{C} : z \rightarrow \frac{1}{z})$. Podemos considerar una *proyección estereográfica*

$$Q : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2 = \{u, v, w\} \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 = 1\},$$

definida por

$$Q(\infty) = (0, 0, 1)$$

$$Q(z) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right),$$

donde $x = \operatorname{Re}(z)$ e $y = \operatorname{Im}(z)$.

Ejercicio. Verificar que $Q : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ es un *homeomorfismo holomorfo*, es decir, preserva orientación y ángulos.

De esta manera, $\widehat{\mathbb{C}}$ es una superficie de Riemann homeomorfa, por $Q : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ a la esfera real dos dimensional S^2 . Usando esta proyección estereográfica podemos inducir en $\widehat{\mathbb{C}}$ la *métrica esférica* de S^2 , la cual denotaremos por d_{S^2} .

Ejercicio. Verificar que para todo $r > 0$ existe una constante positiva k tal que

$$\frac{1}{k} d_E(z_1, z_2) \leq d_{S^2}(z_1, z_2) \leq k d_E(z_1, z_2),$$

para todo $z_1, z_2 \in B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$.

Si agregamos la coordenada $(\mathbb{C}, J(z) = \bar{z})$ al atlas anterior, entonces obtenemos un atlas dianalítico.

- (3) Curvas Hiperelípticas. Sean a_1, \dots, a_{2g+1} puntos diferentes en el plano complejo.

$$S = \{[u : v : w] \in \mathbb{P}^3 : v^2 w^{2g-1} = \prod_{j=1}^{2g+1} (u - a_j w)\}$$

es una superficie de Riemann. Coordenadas son dadas por:

- (a) Si $w_0 \neq 0$ and $u_0/w_0 \neq a_j$, entonces tomemos

$$z([u : v : w]) = u/w$$

- (b) Si $w_0 \neq 0$ y $u_0/w_0 = a_j$, entonces tomamos

$$z[u : v : w] = \sqrt{u/w - a_j}$$

- (c) Si $w_0 = 0$, entonces tomamos

$$z[u : v : w] = \sqrt{w/u}$$

- (4) Consideremos una superficie de Riemann R (posiblemente con borde) junto a un atlas analítico $\mathcal{F} = \{(U_j, z_j) : j \in J\}$. Entonces podemos considerar un nuevo atlas analítico $\mathcal{G} = \{(U_j, w_j) : j \in J\}$, donde $w_j = \bar{z}_j$. Si juntamos estos dos atlas, entonces obtenemos un atlas dianalítico para R . Este es un ejemplo de una superficie de Klein que es orientable. Recíprocamente, si X es una superficie de Klein orientable con atlas dianalítico \mathcal{F} , entonces siempre es posible extraer de tal atlas dos atlas analíticos que la transforman en superficies de Riemann [Alling-Greenleaf].
- (5) Consideremos la relación de equivalencia en el plano complejo dada por

$z \cong w$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$w = \begin{cases} z + n, & \text{si } n \text{ es par} \\ \bar{z} + n, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Consideremos el cociente $S = \mathbb{C}/\cong$ definido por la relación de equivalencia anterior y denotemos por $P : \mathbb{C} \rightarrow S$ la proyección natural. Si damos a S de la topología cociente, entonces es fácil verificar que P resulta ser continua, abierta y un cubrimiento universal. El grupo cobertor es dado por el grupo cíclico generado por la pseudo-translación $T(z) = \bar{z} + 1$.

Usando inversas locales de P uno obtiene un atlas para S que es dianalítico. Esta superficie de Klein es la banda de Möbius.

6.3. Automorfismos de Superficies de Klein

Consideremos dos superficies de Klein X_1 y X_2 . Una función continua $F : X_1 \rightarrow X_2$ tal que $F(\partial X_1) \subset \partial X_2$, es llamada una función dianalítica en el punto $p \in X_1$ si existen coordenadas locales (U, z) para X_1 con $p \in U$ y (V, w) para X_2 con $F(U) \subset V$ tal que

$$wFz^{-1} : z(U) \rightarrow \mathbb{C}$$

es complejo analítica o complejo antianalítica. Si la función es dianalítica en cada punto de X_1 , entonces decimos que F es una función dianalítica. Dos superficies de Klein son dianalíticamente equivalentes si existe un homeomorfismo entre ellas que es dianalítico como también su inversa.

Ejercicio. Sean X_1 y X_2 superficies de Klein y $F : X_1 \rightarrow X_2$ una función.

- (1) Mostrar que si la función $F : X_1 \rightarrow X_2$ es dianalítica en un punto $p \in X_1$, entonces existe un abierto W en X_1 , $p \in W$, tal que F es dianalítica en W .
- (2) Concluir de lo anterior que si tanto X_1 como X_2 son superficies de Riemann, entonces el conjunto de puntos de X_1 donde F es analítica es un subconjunto abierto y cerrado (concluir lo mismo del conjunto de puntos donde F es antianalítica)
- (3) Usar lo anterior para deducir que si X_1 y X_2 son superficies de Riemann, entonces en cada componente conexa de X_1 toda función dianalítica $F : X_1 \rightarrow X_2$ debe ser analítica o antianalítica.

Un *automorfismo dianalítico* $F : X \rightarrow X$ de una superficie de Klein X es por definición un homeomorfismo que es dianalítico.

Ejercicio. Verificar que la inversa de un automorfismo dianalítico es necesariamente dianalítico.

En el caso que X es una superficie de Riemann, entonces uno puede definir o *automorfismos analíticos* o *automorfismos holomorfos* (respectivamente, o *automorfismos antianalíticos* o *automorfismos antiholomorfos*) si en coordenadas locales siempre es analítica (respectivamente, antianalítica).

Ejercicio. Suponga que S es una superficie de Riemann conexa y sea $F : S \rightarrow S$ un automorfismo dianalítico. Verifique que F es un automorfismo holomorfo o un automorfismo antiholomorfo. ¿Qué pasa si la superficie de Riemann no es conexa?

6.4. Automorfismos del Disco Unitario

Consideremos la superficie de Riemann dada por el disco unitario

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

Es claro que la función $J(z) = \bar{z}$ es un automorfismo antiholomorfo de Δ , luego sólo necesitamos calcular los automorfismos holomorfos de esta superficie. Por otro lado, para cada $\alpha \in \Delta$ y para cada $\theta \in \mathbb{R}$ tenemos que la función

$$T_{\theta, \alpha}(z) = e^{\theta i} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

es un automorfismo holomorfo de Δ .

Sea F un automorfismo holomorfo del disco Δ y sea $F(0) = \alpha$. Entonces $Q = T_{0, \alpha}F$ es automorfismo holomorfo del disco Δ tal que $Q(0) = 0$. Usando el lema de Schwarz tanto para Q como para Q^{-1}

obtenemos que

$$|Q(z)| \leq |z| \quad |Q^{-1}(w)| \leq |w|$$

para todo $z, w \in \Delta$. Luego obtenemos que $|Q(z)| = |z|$, para todo $z \in \Delta$. Usando de nuevo el lema de Schwarz obtenemos que $Q(z) = e^{\theta i} z$ y, en particular,

$$F = T_{\theta, \alpha e^{-\theta i}}$$

En resumen, todo automorfismo holomorfo de Δ es de la forma

$$T_{\theta, \alpha}(z) = e^{\theta i} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

y todo automorfismo antiholomorfo de Δ es de la forma

$$T_{\theta, \alpha}(z) = e^{\theta i} \frac{\bar{z} - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\bar{z}}$$

Ejercicio. Calcular los automorfismos holomorfos y antiholomorfos del semiplano superior de Poincaré

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

6.5. Automorfismos de la Esfera de Riemann

Una *transformación de Möbius* es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Una *transformación extendida de Möbius* es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de la forma

$$T(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

donde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Denotaremos por \mathbb{M} al grupo de transformaciones de Möbius y por $\widetilde{\mathbb{M}}$ al grupo generado por \mathbb{M} y las transformaciones extendidas de Möbius, es decir, generado por \mathbb{M} y la conjugación $J(z) = \bar{z}$.

Ejercicio. Verificar que toda transformación de Möbius es un automorfismo holomorfo de la esfera de Riemann y que toda transformación extendida de Möbius es un automorfismo antiholomorfo de esta.

El siguiente resultado complementa el ejercicio anterior:

Proposición 6.1. *Todo automorfismo holomorfo (respectivamente, antiholomorfo) de la esfera de Riemann es una transformación de Möbius (respectivamente, transformación extendida de Möbius).*

DEMOSTRACIÓN. Como la composición de un automorfismo antiholomorfo con la conjugación $J(z) = \bar{z}$ resulta ser un automorfismo holomorfo, basta con verificar que todo automorfismo holomorfo es una transformación de Möbius. Para esto, supongamos que $F : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es un automorfismo holomorfo. Conjugando por la izquierda con una transformación de Möbius, si es necesario, podemos

asumir que $F(0) = 0$ y $F(\infty) = \infty$. Luego $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función entera. Si miramos su desarrollo en serie de potencia alrededor de 0, tenemos que

$$F(z) = a_1z + a_2z^2 + \dots$$

Como $F(\infty) = \infty$, tenemos que $G(z) = F(1/z)$ es una función meromorfa inyectiva. Luego $0 = a_2 = a_3 = \dots$. Esto dice que

$$F(z) = a_1z$$

es decir una transformación de Möbius. \square

Usando el hecho que todo automorfismo holomorfo y antiholomorfo del plano complejo es extendible continuamente a un homeomorfismo de la esfera de Riemann (fijando el punto al infinito), obtenemos que estos coinciden con los automorfismos de la esfera de Riemann que fijan ∞ . Esto nos da el siguiente resultado.

Corolario 6.2. *Todo automorfismo holomorfo (respectivamente, antiholomorfo) del plano complejo \mathbb{C} es una transformación de Möbius de la forma $T(z) = az + b$, donde $a \neq 0$ (respectivamente, una transformación extendida de Möbius de la forma $T(z) = a\bar{z} + b$, donde $a \neq 0$).*

Ejercicios.

- (1) Toda transformación de Möbius, diferente de la identidad, tiene a lo más dos puntos fijos.
- (2) Si T es una transformación de Möbius con exactamente un punto fijo, entonces esta es conjugada en \mathbb{M} a la transformación $P(z) = z + 1$. En este caso diremos que T es una *transformación parabólica*.
- (3) Si T es una transformación de Möbius con exactamente dos puntos fijos, entonces esta es conjugada en \mathbb{M} a una transformación de la forma $L(z) = \lambda e^{i\theta}z$, con $\lambda \geq 1$. Si $\lambda = 1$, entonces decimos que T es una *transformación elíptica*. En caso contrario, decimos que T es una *transformación loxodrómica*. Una transformación loxodrómica para el cual $e^{i\theta} = 1$ es también llamada una *transformación hiperbólica*.
- (4) El conjunto de puntos fijos de toda transformación extendida de Möbius es o bien vacío, un punto, dos puntos o un círculo.
- (5) Si \mathcal{C} es un círculo en la esfera de Riemann, entonces existe una reflexión $J_{\mathcal{C}}$ cuyo círculo de puntos fijos es \mathcal{C} . Deducir que si $T \in \tilde{\mathbb{M}}$, entonces $T(\mathcal{C})$ sigue siendo un círculo en la esfera de Riemann [Ind. Como todo círculo \mathcal{C} en la esfera de Riemann es la imagen por una transformación de Möbius T del eje real compactificado $\widehat{\mathbb{R}}$, y la composición $J_{\mathcal{C}} = TJT^{-1}$ es de nuevo una involución antiholomorfa, donde $J(z) = \bar{z}$, obtenemos que $J_{\mathcal{C}}$ es reflexión con \mathcal{C} como conjunto de puntos fijos].
- (6) Verificar que no pueden haber dos reflexiones diferentes con el mismo círculo de puntos fijos.
- (7) Toda transformación extendida de Möbius S es conjugada por una transformación de Möbius a una de las siguientes:
 - (7.1) $T(z) = \bar{z} + 1$, si S tiene sólo un punto fijo. En este caso, decimos que S es una *transformación pseudo-parabólica*;
 - (7.2) $T(z) = \lambda e^{i\theta}\bar{z}$, $\lambda > 1$, si S sólo tiene dos puntos fijos. En este caso, decimos que S es una *transformación pseudo-hiperbólica*;
 - (7.3) $T(z) = \bar{z}$, si S tiene un círculo de puntos fijos. Decimos que S es una *reflexión*;
 - (7.4) $T(z) = e^{i\theta}/\bar{z}$, donde $e^{i\theta} \neq 1$, si S no tiene puntos fijos. Decimos que S es una *transformación pseudo-elíptica*.
- (8) Todo automorfismo holomorfo o antiholomorfo de la esfera de Riemann es composición de reflexiones.

- (9) Dos transformaciones de Möbius, ambas diferentes de la identidad, conmutan si y sólo si vale una de las siguientes:
- (a) ambas son elípticas de orden dos, cada una permutando los puntos fijos de la otra; o bien
 - (b) ambas tienen los mismos puntos fijos.
- (10) Sea $f : \Omega \subset \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función analítica tal que $f'(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$ (es decir, f es localmente inyectiva). Se define la *derivada Schwarziana* de f en el punto $w \in \Omega$ como

$$\{f, w\} = \left(\frac{f''(w)}{f'(w)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(w)}{f'(w)} \right)^2$$

Verificar que si $T \in \mathbb{M}$, entonces

$$\{T \circ f, w\} = \{f, w\}$$

$$\{f \circ T, w\} = \{f, T(w)\} T'(w)^2$$

Como consecuencia observe que

$$\{T, w\} = 0$$

- (11) Sean $S, T \in \mathbb{M} - \{I\}$ transformaciones de Möbius con exactamente un punto fijo en común p . Suponiendo que al menos una de ellas tenga al menos dos puntos fijos, verificar que $[T, S] = T^{-1}S^{-1}TS$ es una transformación parabólica con punto fijo p .

6.6. Razones cruzadas

Dados cuatro puntos diferentes z, u, v and w en la esfera de Riemann, tenemos asociado el valor en $\widehat{\mathbb{C}}$ definido por

$$\{z, u; v, w\} = \frac{z-w}{z-u} \frac{v-u}{v-w}$$

y llamada la *razón cruzada* de esos puntos. Observemos que

$$\{\infty, u; v, w\} = \frac{v-u}{v-w}.$$

Ejercicio. Usar lo anterior para probar que dados tres puntos diferentes a, b y c en la esfera de Riemann, entonces siempre existe una y sólo una transformación de Möbius T tal que $T(a) = \infty$, $T(b) = 0$ y $T(c) = 1$.

Ejercicio. Verificar que para toda transformación $T \in \widetilde{\mathbb{M}}$ vale la siguiente propiedad de invariancia

$$\begin{aligned} \{z, u; v, w\} &= \{T(z), T(u); T(v), T(w)\}, \text{ si } T \in \mathbb{M} \\ \overline{\{z, u; v, w\}} &= \{T(z), T(u); T(v), T(w)\}, \text{ si } T \in \widetilde{\mathbb{M}} - \mathbb{M} \end{aligned}$$

Lo anterior tiene como aplicación el el hecho siguiente:

Proposición 6.3. *Cuatro puntos diferentes viven en el mismo círculo si y sólo si su razón cruzada es real.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que los cuatro puntos son z, u, v y w . Por una transformación de Möbius T podemos asumir que $T(u) = \infty$, $T(v) = 0$ y $T(w) = 1$. Por el ejercicio anterior, la razón cruzada no cambia y es fácil verificar que $\{\infty, 1; z, 0\} = \frac{z-1}{z} \in \mathbb{R}$ si y sólo si $z \in \mathbb{R}$ si y sólo si los puntos z, u, v, w viven sobre un mismo círculo. \square

Ejercicio. Considere sucesiones z_n, u_n, v_n, w_n , en la esfera de Riemann, tales que para cada n se tiene que ellos son puntos diferentes y viven sobre el mismo círculo C_n . Supongamos que z_n converge a z , u_n converge a u , v_n converge a v y w_n converge a w , tal que z, u, v y w son puntos diferentes. Verificar que ellos viven sobre un círculo.

Las razones cruzadas permiten identificar las transformaciones holomorfas y antiholomorfas de la esfera de Riemann.

Proposición 6.4. Sea $T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función.

- (1) Si T preserva la razón cruzada, entonces $T \in \mathbb{M}$;
- (2) Si T conjugua la razón cruzada, entonces $T \in \widetilde{\mathbb{M}} - \mathbb{M}$.

DEMOSTRACIÓN. Veamos (1). Supongamos que tenemos una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $\{z, u; v, w\} = \{T(z), T(u); T(v), T(w)\}$, para todo cuadruple de puntos diferentes de la esfera de Riemann. Es claro que T no puede ser entonces constante. Compongamos a la izquierda por una transformación de Möbius (si es necesario) para suponer que $T(\infty) = \infty$. La igualdad $\{z, \infty; v, w\} = \{T(z), T(\infty); T(v), T(w)\}$ es equivalente a la igualdad

$$\frac{T(z) - T(w)}{z - w} = \frac{T(v) - T(w)}{v - w}$$

Luego, existe una constante $k \neq 0$ tal que

$$T(z) - T(w) = k(z - w).$$

En este caso, $S = \frac{1}{k}T$ satisface que

$$S(z) - S(w) = z - w.$$

Es claro entonces que S es isometría Euclidiana del plano, es decir la composición de una rotación y una translación, es decir, S y luego T es una transformación de Möbius.

La demostración de (2) es equivalente ya que basta ver que \overline{T} , la composición de T con la conjugación $J(z) = \overline{z}$ satisface (1). \square

6.7. Círculos Isométricos

6.7.1. Transformaciones de Möbius. Consideremos una transformación de Möbius T , diferente de la identidad. Podemos mirar aquellos puntos en la esfera de Riemann donde T no produce distorsión Euclidiana, es decir, aquellos puntos donde $|T'(z)| = 1$.

(1) Si $T(\infty) = \infty$, entonces $T(z) = az + b$, con $a \neq 0$. En este caso, $|T'(z)| = |a|$. Luego T no produce distorsión en un punto si y sólo si no produce distorsión en todo punto si y sólo si T es elíptica.

(2) Si $T(z) \neq \infty$, entonces

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con $c \neq 0$ y $ad - bc = 1$. En este caso $|T'(z)| = 1$ si y sólo si $|cz + d| = 1$. Obtenemos así que el conjunto de puntos donde T no produce distorsión Euclidiana es un círculo con centro

$$\frac{-d}{c}$$

y cuyo radio es

$$\frac{1}{|c|}$$

Este círculo recibe el nombre de *círculo isométrico* de T y lo denotamos por I_T .

Si consideramos la transformación de Möbius inversa de T ,

$$T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

obtenemos los respectivos círculos isométricos

$$I_T := \{z \in \mathbb{C} : |z + \frac{d}{c}| = \frac{1}{|c|}\},$$

$$I_{T^{-1}} := \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{a}{c}| = \frac{1}{|c|}\}.$$

Ambos círculos isométricos tienen el mismo radio Euclidean. Más aún, se puede verificar directamente que:

$$T(I_T) = I_{T^{-1}}$$

y

$$T(\{z \in \mathbb{C} : |z + \frac{d}{c}| \leq \frac{1}{|c|}\}) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{a}{c}| \geq \frac{1}{|c|}\} \cup \{\infty\}$$

Geoméricamente, tenemos cuatro posibles configuraciones para este par de círculos:

- (1) Ambos círculos coinciden. Esto ocurre si y sólo si $d = -a$, lo cual es lo mismo que decir que $T^2 = I$.
- (2) Ambos círculos son tangentes en un punto. Esto ocurre si y sólo si la distancia de los centros es igual a la suma de los radios, es decir $|a + d| = 2$. Luego T es parabólica o loxodrómica.
- (3) Ambos círculos intersectan en exactamente dos puntos. Esto ocurre si y sólo si la distancia de los centros es mayor a cero y es menor a la suma de los radios, es decir $0 < |a + d| < 2$. Luego T es elíptica o loxodrómica.
- (4) Ambos círculos son disjuntos. Esto ocurre si y sólo si la distancia de los centros es mayor a la suma de los radios, es decir $|a + d| > 2$. Luego T es loxodrómica.

Supongamos ahora que $T^2 \neq I$. Tenemos entonces que los centros de ambos círculos isométricos son diferentes. Consideremos la única línea L que pasa por esos centros, es decir, por $T^{-1}(\infty)$ y $T(\infty)$. Sea M la línea ortogonal a L que pasa por el medio del trazo de L determinado por ambos centros. Sea $R = \eta\tau$, donde τ es la única reflexión cuyo conjunto de puntos fijos es I_T y η la única reflexión cuyo círculo de puntos fijos es $M \cup \{\infty\}$. Entonces $S = T^{-1}R$ es una transformación de Möbius que satisface $S(\infty) = \infty$, $S(I_T) = I_T$ y $S(T^{-1}(\infty)) = T^{-1}(\infty)$. Es fácil ver que necesariamente S es una rotación (luego una transformación elíptica). En este caso $T = RS^{-1}$. En el caso que $T^2 = I$, podemos hacer lo mismo considerando $\eta = I$. De esta manera hemos obtenido el siguiente:

Proposición 6.5. *Sea T una transformación de Möbius diferente de la identidad tal que $T(\infty) \neq \infty$. Entonces:*

- (1) *Los círculos isométricos de T y T^{-1} coinciden si y sólo si $T^2 = I$.*
- (2) *T es composición de dos reflexiones y una rotación (si $T^2 = I$, una de las reflexiones es reemplazada por la identidad). Una reflexión y la rotación preservan la métrica Euclidean del plano. Luego la distorsión de áreas Euclideanas producida por T es la producida por la reflexión en su círculo isométrico.*

6.7.2. Transformaciones Extendidas de Möbius. Dada una transformación extendida de Möbius $T \in \tilde{\mathbb{M}} - \mathbb{M}$, tal que $T(\infty) \neq \infty$, definimos su círculo isométrico I_T como el lugar geométrico donde T preserva la métrica Euclidean. Considerando $J(z) = \bar{z}$ (la cual es isometría Euclidean) podemos ver que el círculo isométrico de T es exactamente el círculo isométrico de $TJ \in \mathbb{M}$, es decir, $I_T = I_{TJ}$.

Ejercicio. Mostrar que $I_T = I_{T^{-1}}$ si y sólo si $T^2 = I$. Calcular el círculo isométrico de $T(z) = \frac{-1}{\bar{z}}$ y el de $T(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.

Una consecuencia directa de la proposición 6.5 y lo anterior es que la defomación Euclideana que realiza una transformación (extendida) de Möbius T , con $T(\infty) \neq \infty$, es exactamente la deformación realizada por la reflexión sobre su círculo isométrico. En forma más clara tenemos las siguientes desigualdades:

Corolario 6.6. Sea $T \in \tilde{\mathbb{M}}$ tal que $T(\infty) \neq \infty$ y sea \mathcal{R} un subconjunto de la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ de cardinalidad mayor que uno. Supongamos que $T^{-1}(\infty) \notin \overline{\mathcal{R}}$, es decir, \mathcal{R} no contiene el centro del círculo isométrico de T en su clausura. Denotemos por diam el diámetro Euclideano en el plano complejo \mathbb{C} , δ la distancia de $T^{-1}(\infty)$ a \mathcal{R} y sea ρ el radio del círculo isométrico de T . Entonces si $\delta > 0$, tenemos que:

- (1) $\text{diam}(T(\mathcal{R})) \leq 2\rho^2/\delta$;
- (2) Si además $\infty \in \mathcal{R}$, entonces $\rho^2/\delta \leq \text{diam}(T(\mathcal{R}))$

DEMOSTRACIÓN. Sólo basta hacer esto para transformaciones de Möbius. Como habíamos observado, la transformación T cambia el diámetro Euclideano en la misma forma como lo hace la reflexión sobre su círculo isométrico. La reflexión en el círculo isométrico de T es dada por

$$\sigma(z) = \frac{\rho^2}{\bar{z} - \overline{T^{-1}(\infty)}} + T^{-1}(\infty)$$

Luego $\sigma(\mathcal{R})$ está contenida en el disco D centrado en $T^{-1}(\infty)$ y radio ρ^2/δ y en particular su diámetro Euclideano está acotado superiormente por el diámetro de D .

Supongamos además que $\infty \in \mathcal{R}$. Esto dice que $\sigma(\mathcal{R})$ contiene al centro del círculo isométrico de T en su clausura. Luego el diámetro Euclideano de $\sigma(\mathcal{R})$ es al menos el radio del disco D . \square

6.8. Grupos Kleinianos

6.8.1. Grupos Discretos. Sea G un subgrupo de $\tilde{\mathbb{M}}$. Diremos que G es un *grupo discreto* si no existe una sucesión $g_n \in G$ de elementos diferentes convergiendo a alguna transformación $T \in \tilde{\mathbb{M}}$. Consideremos un subgrupo G de $\tilde{\mathbb{M}}$ y H un subgrupo de índice finito en G . Es claro de la definición que si G es discreto, entonces H también lo es. Recíprocamente, supongamos que H es discreto. Como H tiene índice finito en G , entonces existen $T_1, \dots, T_n \in G - H$ tal que $G = H \cup HT_1 \cup \dots \cup HT_n$. Si G no fuese discreto, entonces existiría una sucesión $g_n \in G$ de elementos diferentes convergiendo a una transformación T . Entonces existe una subsucesión infinita de elementos en HT_j para cierto $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, donde $T_0 = I$. Luego $g_n = h_n T_j$ y, en particular, $h_n = g_n T_j^{-1}$ converge a TT_j^{-1} . Como H es discreto, entonces $h_n = TT_j^{-1}$ para n grande, en particular, $g_n = T$ para n grande, obteniendo una contradicción. Hemos probado el siguiente:

Proposición 6.7. Sea G subgrupo de $\tilde{\mathbb{M}}$ y H un subgrupo de índice finito en G . Entonces G es discreto si y sólo si H es discreto.

Ejercicio. Sea G subgrupo de $\tilde{\mathbb{M}}$ y sea H subgrupo de G .

- (a) Verificar que H es necesariamente un grupo discreto.
- (b) Verificar que si $G^+ = G \cap \mathbb{M}$, entonces G es discreto si y sólo si G lo es.

Proposición 6.8. Un grupo $G < \tilde{\mathbb{M}}$ es discreto si y sólo si no existe sucesión $g_n \in G$ de elementos diferentes convergiendo a la identidad I .

DEMOSTRACIÓN. Es claro que si existe sucesión de elementos diferentes de la identidad convergiendo a la identidad, entonces G es no discreto por la definición. Recíprocamente, sea G un grupo discreto y sea $\{g_n\}$ una sucesión en G convergiendo a $g \in \widetilde{\mathbb{M}}$. Entonces $k_n = g_{n+1}g_n^{-1}$ es una sucesión en G convergiendo a la identidad. Si podemos extraer una subsucesión de elementos diferentes, entonces obtenemos una contradicción a la discreitud de G . Si no es posible encontrar una subsucesión de elementos diferentes, entonces existe $N > 0$ tal que k_n son todos iguales para $n > N$. De esta manera, $k_n = I$ para $n > N$ lo cual obliga a tener $g_n = g_{n+1}$ para $n > N$, una contradicción. \square

Hay veces que es bueno conjugar nuestros grupos en orden a simplificar argumentos. El siguiente resultado nos garantiza que la propiedad de ser discreto no es modificada por tal proceso.

Proposición 6.9. *Sea $G < \widetilde{\mathbb{M}}$ un grupo y sea $h \in \widetilde{\mathbb{M}}$. Entonces G es discreto si y sólo si hGh^{-1} lo es.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que dada cualquier sucesión en G que es convergente, digamos $\{g_n\}$, entonces la sucesión en hGh^{-1} dada por $\{h_n = hg_nh^{-1}\}$ es convergente. Además una de ellas es eventualmente constante si y sólo si la otra lo es. \square

Ejercicio. Sea K un subgrupo del grupo multiplicativo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Entonces K es denso o un grupo cíclico finito.

Ejemplo 6.1. Sea G el grupo cíclico generado por una transformación elíptica. Módulo conjugación por una transformación de Möbius, podemos asumir que G es generada por $T(z) = e^{2\pi i q} z$. Esto nos da un isomorfismo de los grupos G y un subgrupo de S^1 . Tenemos que G es finito si y sólo si T es de orden finito si y sólo si $q \in \mathbb{Q}$. Además, el ejercicio anterior nos dice que T es de orden infinito si y sólo si existen $n_k \in \mathbb{N}$ tales que $e^{2\pi i q n_k}$ es una sucesión de elementos diferentes convergiendo a 1. En particular, T^{n_k} da una sucesión de elementos diferentes convergiendo a la identidad. En resumen, G es discreto si y sólo si T tiene orden finito.

Ejercicio. Verificar que todo grupo cíclico generado por una transformación parabólica o loxodrómica es necesariamente discreto.

6.8.2. Grupos Discontinuos. Dado un subgrupo G de $\widetilde{\mathbb{M}}$ tenemos las siguientes definiciones:

- (1) Un punto $p \in \widehat{\mathbb{C}}$ es llamado un *punto de discontinuidad* del grupo G si:
 - (1.1) $G_p = \{g \in G : g(p) = p\}$ es finito (G_p es llamado el *estabilizador* de p en G);
 - (1.2) Existe un abierto U tal que $p \in U$ y $g(U) \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G - G_p$.
- (2) Un punto que no es un punto de discontinuidad de G es llamado un *punto límite* de G .
- (3) El conjunto de los puntos de discontinuidad de G es llamado la *región de discontinuidad* de G y es usualmente denotado por $\Omega(G)$ o sólo Ω si es claro del contexto el grupo al cual refiere.
- (4) El conjunto de los puntos límite de G es llamado el *conjunto límite* de G y es usualmente denotado por $\Lambda(G)$ o Λ si no hay confusión.

Un grupo G que actúe discontinuamente en algún punto de la esfera de Riemann se llama un *grupo Kleiniano planar*, es decir, si $\Omega(G) \neq \emptyset$.

Las siguientes propiedades para un subgrupo son fácil de verificar:

Proposición 6.10. *Sea G un subgrupo de $\tilde{\mathbb{M}}$. Entonces*

- (a) $\Omega(G)$ es un abierto y $\Lambda(G)$ es un compacto;
- (b) $\Omega(G) \cap \Lambda(G) = \emptyset$;
- (c) $\Omega(G) \cup \Lambda(G) = \tilde{\mathbb{C}}$;
- (d) Para todo $g \in G$ se tiene que $g(\Omega(G)) = \Omega(G)$ y $g(\Lambda(G)) = \Lambda(G)$;
- (e) Si G es subgrupo Kleiniano planar de \mathbb{M} , $p \in \Omega(G)$, entonces G_p es grupo cíclico finito.

Ejercicio. Sea H un subgrupo de un grupo Kleiniano planar G en $\tilde{\mathbb{M}}$. Ver que H es necesariamente un grupo Kleiniano planar.

6.8.3. Puntos Fijos en $\Omega(G)$. Dado un grupo Kleiniano planar G en $\tilde{\mathbb{M}}$, tenemos que los puntos de discontinuidad de G vienen en dos sabores. Sea $p \in \Omega(G)$, entonces su estabilizador en G , G_p , puede ser o no trivial. Denotemos por G^+ el subgrupo de G consistiendo de sus transformaciones de Möbius. Entonces, tenemos que $G = G^+ \circ G^+$ es de índice dos en G . Luego, por el ejercicio anterior, G^+ es grupo Kleiniano planar. En este caso, G_p^+ es igual a G_p ó tiene índice dos en G_p .

- (1) En el caso que G_p es trivial, entonces tenemos la existencia de un abierto $U \subset \Omega(G)$ conteniendo p tal que $T(U) \cap U = \emptyset$ para todo $T \in G$, $T \neq I$. En este caso, tenemos que todo punto $q \in U$ tiene estabilizador trivial. La órbita de U bajo G consiste en una colección dos a dos disjunta de trasladadas de U .
- (2) Supongamos que G_p es no trivial. Entonces tenemos dos posibilidades para G_p^+ .
 - (2.1) Si G_p^+ es trivial. Si $G_p = G_p^+$, entonces G_p es trivial y estamos en el caso (1) anterior. Si $G_p \neq G_p^+$, entonces G_p , al ser G_p^+ un subgrupo de índice dos en G_p , está necesariamente generado por una transformación extendida de Möbius $\tau \in \tilde{\mathbb{M}} - \mathbb{M}$ de orden dos. Por el ejercicio (7) de la sección 6.5., tenemos que τ es necesariamente una reflexión. En este caso, tenemos la existencia de un abierto $U \subset \Omega(G)$, conteniendo p , tal que $\tau(U) = U$ y $T(U) \cap U = \emptyset$ para $T \in G - \{I, \tau\}$. En este caso, todo punto $q \in U$, que no está en el arco de círculo de puntos fijos de τ , tiene estabilizador G_q trivial.
 - (2.2) Supongamos que G_p^+ no es trivial. El ejercicio (11) de la sección 6.5., dice que este grupo es un grupo cíclico finito. Digamos que G_p^+ está generado por la transformación elíptica E , tal que $E^m = I$. No hay problemas en asumir que $E(z) = e^{2\pi i/m}z$ y $p = 0$. Si $G_p = G_p^+$, entonces G_p es cíclico finito. Si $G_p \neq G_p^+$, entonces, usando el hecho que G_p contiene a G_p^+ como subgrupo de índice dos, se puede observar que G_p contiene una transformación extendida de Möbius de orden finito $\tau \in \tilde{\mathbb{M}} - \mathbb{M}$, tal que $\tau^2 \in G_p^+$. De nuevo el ejercicio (7) de la sección 6.5., asegura que τ es una reflexión. Módulo una rotación Euclidenana, no hay problemas en suponer que $\tau(z) = \bar{z}$. Luego,

$$G_p = \langle E, \tau : E^m = \tau^2 = 1, \tau E \tau = E^{-1} \rangle$$

En este caso, existe un abierto U , conteniendo p , tal que $T(U) \cap U = \emptyset$ para todo $T \in G - G_p$ y $T(U) = U$ para todo $T \in G_p$. Todo punto $q \in U - \{p\}$ tiene estabilizador trivial.

Lo anterior también asegura que, si G es un grupo Kleiniano planar en $\tilde{\mathbb{M}}$, entonces el conjunto de puntos en $\Omega(G)$ cuyo estabilizador es no trivial es denso en $\Omega(G)$. En particular, existen puntos $p \in \Omega(G)$ cuyo estabilizador es trivial; esto nos permite tener una biyección entre G y la órbita de una vecindad U de p como antes. De aquí obtenemos

Proposición 6.11. *Todo grupo Kleiniano planar en $\tilde{\mathbb{M}}$ es numerable.*

Proposición 6.12. *Todo grupo Kleiniano planar en \tilde{M} es necesariamente discreto.*

DEMOSTRACIÓN. Si G no fuese discreto, entonces existiría una sucesión $\{T_n\}$ en G , de elementos diferentes, convergiendo a la identidad. En particular, para cada $p \in \Omega(G)$ vale que $T_n(p)$ converge a p . Si tomamos p con estabilizador G_p trivial, entonces esto diría que para todo abierto U conteniendo a p debe valer que $T_n(U) \cap U \neq \emptyset$. Esto es una contradicción. \square

Ejercicio.

- (1) Verificar directamente de la definición que todo grupo finito en $\widetilde{\mathbb{M}}$ es necesariamente Kleiniano planar. En este caso, $\Omega(G) = \widehat{\mathbb{C}}$.
- (2) Sea G el grupo cíclico generado por la transformación de Möbius T . Verificar que G es Kleiniano planar si y sólo si T no es conjugada en \mathbb{M} a una transformación del tipo $Q(z) = e^{i\theta}z$, donde $\theta \notin 2\pi\mathbb{Q}$.
- (3) Considere el grupo G generado por las translaciones $A(z) = z + a$ y $B(z) = z + b$, donde $a, b \in \mathbb{C}$. Si a y b son linealmente independiente sobre \mathbb{R} , entonces G es un grupo Kleiniano planar isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y $\Omega(G) = \mathbb{C}$. Si a o b es igual a cero pero no ambos, entonces G es Kleiniano planar isomorfo a \mathbb{Z} y $\Omega(G) = \mathbb{C}$. Si ambos $a = b = 0$, entonces G es Kleiniano planar (el grupo trivial) y $\Omega(G) = \widehat{\mathbb{C}}$. Si a y b son linealmente dependientes sobre \mathbb{R} , ambos no cero, entonces G es Kleiniano planar si y sólo si el subgrupo aditivo generado por a y b no es denso en el subespacio generado por a .
- (4) Verificar que todo grupo Kleiniano planar elemental es conjugado por una transformación de Möbius a una extensión finita de alguno de los casos anteriores.
- (5) El grupo formado por las transformaciones de Möbius

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}[i]$ tal que $ad - bc = 1$, es un grupo discreto que no es Kleiniano planar. [Ind. Darse cuenta que $\infty \in \Lambda(G)$. Usar el hecho que \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} y buscar la órbita de ∞]

- (6) Probar que todo grupo discreto G de transformaciones de Möbius que es isomorfo como grupo abstracto a un grupo abeliano sin torsión es necesariamente isomorfo a \mathbb{Z} ó $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
- (7) Sean \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 dos círculos en la esfera de Riemann. Denote por σ_j la reflexión en \mathcal{C}_j , para $j = 1, 2$, y por G el grupo generado por σ_1 y σ_2 . Determinar cuando G es un grupo Kleiniano planar.

6.8.4. Algunos ejemplos de grupos Kleinianos.

- (a) *Grupos Fuchsianos:* Estos grupos tienen la característica que dejan invariante un disco Euclideo. El conjunto ímite está contenido en el círculo borde. Si todo el círculo borde es el conjunto ímite, entonces decimos que G es un grupo Fuchsiano de primera clase. En caso contrario, decimos que es de segunda clase.

Estos grupos aparecen como los grupos cubrientes universales de las superficies de Riemann hiperbólicas; aquellas superficies de característica de Euler negativa. Por ejemplo, (i) las superficies cerradas de género mayor o igual a dos; (ii) esferas con al menos tres bordes; (iii) superficies cerradas de género al menos uno y con un punto eliminado; etc.

- (b) *Grupos Uniformizantes:* Estos grupos tienen una componente invariante en su región de discontinuidad. Por ejemplo, los grupos Fuchsianos son de este tipo.
- (c) *B-Grupos:* Estos son grupos uniformizantes que tienen una componente invariante que es simplemente conexa. Por ejemplo, los grupos Fuchsianos de primera clase.
- (d) *Grupos de Schottky anodados:* Estos son grupos Kleinianos planares isomorfos a grupos libres de rango finito. El rango de este grupo abstracto es también llamado el género del grupo de Schottky anodado. Un *grupo de Schottky* es por definición un grupo de Schottky anodado donde sus elementos diferentes de la identidad son transformaciones loxodrómicas. Miraremos este tipo de grupos en un capítulo más adelante.

6.9. Espacio Hiperbólico 3-Dimensional: Extensión de Poincaré

Un modelo del *espacio hiperbólico* tres dimensional es dado por el semi-espacio tres deimensional

$$\mathbb{H}^3 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : t > 0\}$$

junto con la métrica hiperbólica

$$ds = \frac{\sqrt{|dz|^2 + dt^2}}{t}.$$

La longitud hiperbólica de un camino continuo

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^3 : \tau \mapsto \gamma(\tau) = (z(\tau), t(\tau))$$

es entonces dada por

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_a^b \frac{\sqrt{z'(\tau)^2 + t'(\tau)^2} d\tau}{t(\tau)}$$

Como $\gamma([a, b])$ es un subconjunto compacto de \mathbb{H}^3 , debemos tener valores $0 < T < S < \infty$ tales que la tercera coordenada $t(\tau) \in [T, S]$. En particular, se puede ver que

$$(*) \quad \frac{1}{S} \mathcal{L}_{\mathbb{R}^3}(\gamma) \leq \mathcal{L}(\gamma) \leq \frac{1}{T} \mathcal{L}_{\mathbb{R}^3}(\gamma)$$

donde $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^3}(\gamma)$ denota la longitud Euclideana de γ .

La distancia hiperbólica $d(p, q)$ entre dos puntos $p, q \in \mathbb{H}^3$ es dada por el ínfimo de las longitudes de todas los caminos continuos que hay entre p y q . Es claro que

- (i) $d(p, q) \geq 0$;
- (ii) $d(p, q) = d(q, p)$;

La desigualdad (*) dice que $d(p, q) = 0$ si y sólo si $\|p - q\| = 0$, es decir,

- (iii) $d(p, q) = 0$ si y sólo si $p = q$;

Por otro lado, si tenemos tres puntos $p, q, r \in \mathbb{H}^3$, entonces si tenemos un camino γ_1 entre p y r y un camino γ_2 entre r y q , tenemos un camino γ entre p y q por yuxtaposición. De esta manera

$$\mathcal{L}(\gamma_3) = \mathcal{L}(\gamma_1) + \mathcal{L}(\gamma_2)$$

Es claro entonces que

$$d(p, q) \leq \mathcal{L}(\gamma_1) + \mathcal{L}(\gamma_2)$$

de lo cual podemos obtener la desigualdad triangular

- (iv) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$.

De esta manera hemos obtenido el siguiente:

Proposición 6.13. *d es en una métrica en \mathbb{H}^3 llamada la métrica hiperbólica.*

Otro modelo de este espacio es también dado por la bola unitaria tres dimensional

$$B^3 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 < 1\}$$

con la métrica Riemanniana

$$ds = \frac{2(du^2 + dv^2 + dw^2)}{1 - (u^2 + v^2 + w^2)}$$

Para ver que estos dos modelos son isométricos, consideremos el homeomorfismo que preserva orientación

$$F = B \circ A : \mathbb{H}^3 \rightarrow B^3$$

definido por la composición de las reflexiones

$$A : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R} : (z, t) \mapsto (z, -t)$$

y $B(z, t) = (0, 1) + 2(z, t - 1) / (|z|^2 + (t - 1)^2)$ [B es la reflexión en la esfera dos dimensional centrada en el punto $(0 + 0i, 1) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ de radio $\sqrt{2}$]. Entonces $F : \mathbb{H}^3 \rightarrow B^3$ resulta ser una isometría. Luego podemos usar indistintamente cualquiera de los dos modelos del espacio hiperbólico tres-dimensional. Para algunos cálculos es mejor un modelo que el otro. El siguiente ejercicio es directa consecuencia del hecho que F es composición de reflexiones en esferas.

Ejercicio.

- (1) Verificar que F envía semiesferas en \mathbb{H}^3 ortogonales al borde $\partial\mathbb{H}^3$ en semi esferas en B^3 también ortogonales al borde $S^2 = \partial B^3$.
- (2) Ver que F envía esferas Euclidianas en \mathbb{H}^3 en esferas Euclidianas en B^3 .

Podemos mirar la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ como la frontera del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 y también como el borde S^2 del modelo B^3 (usando la proyección estereográfica Q vista en 6.2. (2)).

Cada círculo en la esfera de Riemann genera una semiesfera en \mathbb{H}^3 ortogonal a su borde en tal círculo. Luego la reflexión en tal círculo se extiende a una reflexión en la semiesfera generada. En forma precisa;

- (1) Si \mathcal{C} es el círculo en el plano complejo de centro p y radio $R > 0$, entonces la ecuación de la semisfera en \mathbb{H}^3 que ella genera es

$$\{(z, t) \in \mathbb{H}^3 : |z - p|^2 + t^2 = R^2\}.$$

La reflexión en \mathcal{C} es

$$\sigma(z) = \frac{R^2}{z - p} + p$$

y su extensión es dada por la reflexión en la semiesfera generada, es decir

$$\sigma(z, t) = \frac{R^2(z - p, t)}{|z - p|^2 + t^2} + (p, 0)$$

- (2) Si \mathcal{C} es la recta L unión ∞ , pasando por el punto $p \in \mathbb{C}$ y haciendo un ángulo θ con el eje $\{Im(z) = 0\}$, entonces la semisfera generada por L en \mathbb{H}^3 es un semiplano ortogonal al borde en L , dada por la ecuación

$$\{(z, t) \in \mathbb{H}^3 : z \in L\}.$$

La reflexión en \mathcal{C} es

$$\sigma(z) = e^{2i\theta} \overline{z - p} + p$$

y su extensión es dada por

$$\sigma(z, t) = (e^{2i\theta} \overline{z - p} + p, t)$$

Ahora, como cada transformación $T \in \widehat{\mathbb{M}}$ es composición de reflexiones, se puede extender a todo \mathbb{H}^3 . Esta extensión recibe el nombre de *extensión de Poincaré*. De manera más explícita, supongamos que tenemos la transformación de Möbius

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

entonces su extensión de Poincaré es dada por

$$\widehat{T}(z, t) = \left(\frac{(az + b)(\overline{cz + d}) + a\bar{c}t^2}{|cz + d|^2 + |c|^2t^2}, \frac{t}{|cz + d|^2 + |c|^2t^2} \right)$$

Ejercicio. Verificar que si S y T son transformaciones de Möbius, entonces $\widehat{ST} = \widehat{S}\widehat{T}$.

Ejercicio.

- (1) Usando las ecuaciones explícitas de las extensiones de Poincaré de las reflexiones, verificar que estas son *isometrías de \mathbb{H}^3* . Concluir que la extensión de Poincaré de todo automorfismo holomorfo o antiholomorfo de la esfera de Riemann es una isometría de \mathbb{H}^3 .
- (2) Verificar que dado dos puntos $p, q \in \mathbb{H}^3$ siempre existe una transformación de Möbius T tal que su extensión de Poincaré \widehat{T} satisface que $\widehat{T}(p) = q$. Concluir que el *grupo de isometrías de \mathbb{H}^3* actúa de manera transitiva. [Ind. ver que la órbita del punto $(0, 1) \in \mathbb{H}^3$ es todo \mathbb{H}^3].
- (3) Nuestra isometría $F : \mathbb{H}^3 \rightarrow B^3$ envía semiesferas de \mathbb{H}^3 ortogonales al borde en semiesferas de B^3 ortogonales al borde. Verificar que F commuta con las extensiones de Poincaré, es decir, si $\widehat{T} : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ es la extensión de Poincaré de la reflexión en el círculo \mathcal{C} , entonces $F\widehat{T}F^{-1} : B^3 \rightarrow B^3$ es la extensión de Poincaré de la reflexión en el círculo $F(\mathcal{C})$ [Ind. Recuerde que F es composición de dos reflexiones].
- (4) Usando el modelo B^3 , ver que toda rotación Euclideana entorno al origen es de hecho una extensión de Poincaré de una transformación (extendida) de Möbius.
- (5) Usando (4) verificar que esferas hiperbólicas (conjunto de puntos que equidistan de un punto dado $p \in \mathbb{H}^3$) es una esfera Euclideana.
- (6) Verificar que la distancia hiperbólica en B^3 entre $(0, 0, 0)$ y un punto $(r, 0, 0)$, donde $0 < r < 1$ es dada por

$$d((0, 0, 0), (r, 0, 0)) = -\ln(1 - r).$$

Verifique que $[0, r]$ da el camino más corto entre estos dos puntos (esta es llamada una *geodésica hiperbólica*).

- (7) Usar la transitividad de las extensiones de Poincaré de las transformaciones de Möbius para obtener la distancia entre dos puntos cualquiera de B^3 y verificar que las geodésicas hiperbólicas son exactamente los semicírculos en B^3 ortogonales al borde.
- (8) Verificar que la esfera hiperbólica centrada en el $(0, 0, 0) \in B^3$ es una esfera Euclideana centrada en $(0, 0, 0)$. Relacionar el radio hiperbólico con el radio Euclideano de esta.
- (9) Determinar las geodésicas y formula de distancia para el modelo \mathbb{H}^3 .

Ejes de Transformaciones de Möbius. Supongamos que $T \in \mathbb{M}$ es una transformación de Möbius diferente de la identidad. Si \widehat{T} denota su extensión de Poincaré, entonces:

- (1) Sea T loxodrómica o elíptica, con puntos fijos $p, q \in \widehat{\mathbb{C}}$. Sea $A(T) \subset \mathbb{H}^3$ la única geodésica que está determinada por p y q . Como \widehat{T} es isometría, tenemos necesariamente que $\widehat{T}(A(T)) = A(T)$. Si T es loxodrómica, entonces la acción de \widehat{T} sobre $A(T)$ es por translación desde uno de los puntos fijos de T (el punto fijo repulsor) hacia el otro punto fijo (el punto fijo atractor). Por otro lado, si T es elíptica, entonces $A(T)$ es formado por los puntos fijos de \widehat{T} . Una forma simple de ver esto es conjugando de manera que $p = 0$ y $q = \infty$.
- (2) Sea T es parabólica, con punto fijo $p \in \widehat{\mathbb{C}}$. Podemos conjugar T por una transformación de Möbius P para suponer que $S(z) = PTP^{-1}(z) = z + 1$. Por cada $R > 0$ podemos considerar el conjunto $C(R) = \{(z, t) \in \mathbb{H}^3 : t > R\}$. Llamamos la bola conical centrada en p y radio R al conjunto $C(T, R) = P^{-1}(C(R))$ (el radio no depende de la elección de P). Entonces como $S(C(R)) = C(R)$, tenemos que $T(C(T, R)) = C(T, R)$. Es claro que la acción de

S sobre el borde de $C(R)$ es la misma acción de S sobre el plano complejo. Luego no es difícil verificar que $C(R)/\langle S \rangle$ (y luego $C(T, R)/\langle T \rangle$) es topológicamente $S^1 \times D^*$, donde $D^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.

Hemos visto que las composiciones de las extensiones de Poincaré de las reflexiones dan isometrías del espacio hiperbólico. Por otro lado, si tenemos una isometría $P : B^3 \rightarrow B^3$, entonces podemos componer P con la extensión de Poincaré de una transformación de Möbius para suponer que $P((0, 0, 0)) = (0, 0, 0)$. Ahora, al ser P una isometría, se verifica que P preserva cada esfera Euclídeana centrada en $(0, 0, 0)$. Por otro lado, cada diámetro de B^3 es una geodésica en B^3 y luego P envía diámetros en diámetros. De aquí se concluye que P es una rotación Euclídeana y, en particular, P es la extensión de Poincaré de una transformación elíptica. Hemos obtenido:

Teorema 6.14. *Toda isometría de \mathbb{H}^3 es la extensión de Poincaré de un automorfismo holomorfo o antiholomorfo de la esfera de Riemann.*

Observemos que usando esta extensión de Poincaré tenemos la siguiente situación. Sea T una transformación de Möbius diferente de la identidad, y sea \widehat{T} su extensión de Poincaré. Si \widehat{T} tiene un punto fijo en \mathbb{H}^3 entonces T debe ser elíptica. En efecto, si T fuese parabólica o loxodrómica, entonces la órbita de cualquier punto de \mathbb{H}^3 se acumula en los puntos fijos de T en la esfera de Riemann.

Ahora que podemos relacionar automorfismos holomorfos y antiholomorfos de la esfera de Riemann con las isometrías del espacio hiperbólico tres dimensional, podemos interrelacionar variedades hiperbólicas con superficies de Riemann. Para esto, primero observamos el siguiente resultado.

Teorema 6.15. *Todo grupo G de isometrías de \mathbb{H}^3 es discreto si y sólo si G actúa de manera discontinua en todo punto de \mathbb{H}^3 . En particular, si G es un grupo discreto en \mathbb{M} , entonces G es numerable.*

Si G es un grupo discreto de isometrías de \mathbb{H}^3 , entonces para todo $p \in \mathbb{H}^3$ debe ser finito. De hecho, usemos el modelo B^3 y pensemos en $p = (0, 0, 0)$ [módulo conjugación en el grupo de isometrías]. El estabilizador G_p es un subgrupo discreto del grupo ortogonal. Como el grupo ortogonal es compacto, entonces G_p es finito. Por otro lado, tenemos el siguiente resultado.

Lema 6.16. *Si G es un grupo discreto de isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 , entonces para todo $p \in \mathbb{H}^3$ se tiene que su órbita por G es un subconjunto discreto de \mathbb{H}^3 .*

DEMOSTRACIÓN. Sea G un grupo discreto de isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 y supongamos que existe un punto $p \in \mathbb{H}^3$ y una sucesión T_n de elementos diferentes en G tal que $T_n(p)$ converge a un punto $q \in \mathbb{H}^3$. No hay pérdida el asumir que $T_n(q)$ converge a un punto $r \in \mathbb{H}^3$, donde $d_{\mathbb{H}^3}(p, q) = d_{\mathbb{H}^3}(r, p)$ (Basta considerar el modelo de la bola unitaria y el hecho que T_n son isometrías).

Como G^+ es o bien igual a G ó de índice dos en G , entonces no hay pérdida de generalidad el asumir que $T_n \in G^+$. Es claro que podemos asumir que las transformaciones $T_{n+1}^{-1}T_n$ son todas diferentes. En efecto, si no pudiesemos asumir esto, entonces a partir de cierto $N > 0$ tendríamos que $T_{n+1}^{-1}T_n = T$, alguna $T \in G^+$. Esto diría que $T_n = T_N T_0^{N-n}$. Como G es discreto, T_0 no puede ser elíptico de orden infinito y como los T_n son diferentes, T_0 no puede ser elíptico de orden finito. Pero si T_0 es parabólico o loxodrómico, entonces es claro que $T_0^{N-n}(x)$ converge a uno de los puntos fijos de T_0 , el cual vive en la frontera del espacio hiperbólico, contradiciendo nuestro supuesto sobre la sucesión $T_n(p)$.

Ahora,

$$d_{\mathbb{H}^3}(T_{n+1}^{-1}T_n(q), q) = d_{\mathbb{H}^3}(T_n(q), T_{n+1}(q)) \rightarrow 0$$

Esto nos dice que podemos encontrar una sucesión $R_n = T_{n+1}^{-1}T_n$ en G^+ de elementos diferentes con la propiedad que

$$R_n(q) \rightarrow q$$

Luego, para cualquier valor $\epsilon > 0$ el conjunto

$$G(\epsilon) = \{T \in G^+ : d_{\mathbb{H}^3}(T(q), q) < \epsilon\}$$

es infinito. Por otro lado, G es discreto, es decir que las normas de las matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ de sus elementos es un conjunto discreto en \mathbb{C} . Un cálculo asegura entonces que las distancias desde un punto q a sus trasladadas por las transformaciones en $G(\epsilon)$ debe ser un conjunto acotado en $[0, \infty)$ (ver [Matsuzaki-Taniguchi], pp 29) y luego, por discreitud, finito. \square

Ahora, teorema 6.15 es un caso particular del siguiente hecho general:

Teorema 6.17. *Sea (X, d) un espacio métrico y G un grupo de sus isometrías. Entonces G actúa de manera discontinua (en todo X) si y sólo si*

- (1) *Para todo $x \in X$, su estabilizador G_x es finito; y*
- (2) *Para todo $x \in X$ la órbita $G(x) = \{T(x) : T \in G\}$ es un subconjunto discreto de X .*

DEMOSTRACIÓN. Si G es discontinuo en todo X , entonces la condición (1) es por definición y la condición (2) es probada de la misma manera como se verificó que todo grupo Kleiniano planar es discreto (ver proposición 6.12). Recíprocamente, supongamos que G satisface propiedades (1) y (2). Si G no actuará discontinuamente en algún punto $p \in X$, entonces para todo abierto U de X , conteniendo a p , tenemos que $T(U) \cap U = \emptyset$ para un número infinito de transformaciones T en G . Luego podemos encontrar una sucesión de puntos x_n convergiendo a p y una sucesión de elementos diferentes g_n en G tal que $g_n(x_n)$ converge a p . Como cada g_n es una isometría, entonces

$$d(g_n(p), p) \leq d(g_n(p), g_n(x_n)) + d(g_n(x_n), p) = d(p, x_n) + d(g_n(x_n), p),$$

luego $g_n(p)$ converge a p . Como la órbita de p es discreta, debe ocurrir que $g_n(p) = p$ para n suficientemente grande. Esto contradice la condición (1). \square

La extensión de Poincaré nos permite relacionar análisis complejo en la esfera de Riemann y geometría hiperbólica tres dimensional. Por ejemplo, supongamos que G es un grupo discreto de transformaciones de Möbius. Por un lado podemos ver G como un grupo discreto de isometrías de \mathbb{H}^3 que preservan orientación. Por lo visto anteriormente, G actúa de manera discontinua sobre todo \mathbb{H}^3 y, como consecuencia $M(G) = \mathbb{H}^3/G$ es una orbifold hiperbólica. En caso que G no tiene torsión, entonces obtenemos una variedad hiperbólica tres dimensional. Si además G es Kleiniano planar, visto como grupo de automorfismos holomorfos de la esfera de Riemann, entonces $\Omega(G)/G$ es una orbifold que podemos ver como la frontera holomorfa de $M(G)$.

Por ejemplo, si G es un grupo de Schottky de género $g \geq 1$, entonces $M(G)$ es un handlebody, es decir, homeomorfa a la suma conexa de g copias de $D \times S^1$, donde D es el disco abierto dos dimensional y S^1 es el círculo unitario. Su frontera holomorfo es una superficie de Riemann de género g . Otro ejemplo es considerar G un grupo Fuchsiano de la primera clase, digamos uniformizando una superficie de Riemann de género $g \geq 2$. Entonces $M(G)$ es homeomorfo a $S \times (-1, 1)$, donde S es una superficie de Riemann de género g . En este caso, su borde holomorfo es homeomorfo a $S \times \{-1, 1\}$.

6.10. Teorema de Uniformización de Koebe

Dada una superficie de Klein X , no-orientable, entonces podemos considerar su doble cobertor orientable $P : S \rightarrow X$. En este caso, S es una superficie de Riemann admitiendo un automorfismo antiholomorfo de orden dos $\tau : S \rightarrow S$, actuando sin puntos fijos, tal que $\langle \tau \rangle$ es el grupo cobertor de P . Luego, el estudio de superficies de Klein no-orientables puede ser interpretado como el estudio de superficies de Riemann admitiendo automorfismos de orden dos antiholomorfos.

Sea S una superficie de Riemann. Uno puede considerar su cobertor universal \widehat{S} y un cubrimiento universal $Q : \widehat{S} \rightarrow S$. Podemos levantar la estructura de superficie de Riemann de S por Q para dotar a \widehat{S} de una estructura de superficie de Riemann simplemente conexa. El cubrimiento $Q : \widehat{S} \rightarrow S$ queda un cubrimiento universal holomorfo y el grupo cobertor $G \cong \pi_1(S, p)$ un grupo de automorfismos holomorfos de \widehat{S} actuando de manera discontinua y sin puntos fijos.

Teorema 6.18 (*Teorema de uniformización [Farkas-Kra]*). *Toda superficie de Riemann simplemente conexa es holomórficamente equivalente a una y sólo una de las siguientes tres:*

$$\mathbb{C}; \quad \widehat{\mathbb{C}}; \quad \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

Podemos entonces suponer que \widehat{S} es una de esas tres posibilidades.

Caso 1: Si $\widehat{S} = \widehat{\mathbb{C}}$, entonces la única manera que G actúe sin puntos fijos es que $G = \{I\}$. En este caso, S es la esfera de Riemann.

Caso 2: Si $\widehat{S} = \mathbb{C}$, entonces la única manera que G actúe sin puntos fijos y de manera discontinua es que sea uno de los siguientes dos formas, módulo conjugación:

- (a) $G = \langle A(z) = z + 1 \rangle$; ó
- (b) $G = \langle A(z) = z + 1, B(z) = z + \tau \rangle$, donde $\tau \in \mathbb{H}$.

En el primer caso, S es holomórficamente equivalente a $\mathbb{C} - \{0\}$ y en el segundo caso, S es un toro (homeomorfo a $S^1 \times S^1$, donde S^1 es el círculo unitario).

Caso 3: Todas las otras superficies de Riemann tienen al plano \mathbb{H} como cobertor universal. Estas superficies son llamadas *superficies de Riemann hiperbólicas*.

6.11. Superficies de Klein de Grupos Kleinianos

Consideremos un grupo Kleiniano planar G de transformaciones de Möbius. En este caso, podemos considerar la siguiente relación de equivalencia en $\Omega(G)$: $p, q \in \Omega(G)$ son equivalentes si y sólo si existe $T \in G$ tal que $T(p) = q$. El conjunto de las clases de equivalencias es denotado por $\Omega(G)/G$. Sea $P : \Omega(G) \rightarrow \Omega(G)/G$ la proyección natural inducida por G . Si dotemos al cociente de la topología cociente obtenemos que $P : \Omega(G) \rightarrow \Omega(G)/G$ es una función continua y abierta. Se puede verificar que este cociente es un espacio topológico Hausdorff. Esto es consecuencia de que toda transformación de Möbius envía círculos en círculos en la esfera de Riemann y que en la métrica esférica los diámetros de una sucesión infinita de círculos dos a dos disjuntos debe converger a cero.

Teorema 6.19. *Sea G un grupo Kleiniano planar en \mathbb{M} . Entonces el cociente $\Omega(G)/G$ tiene de manera natural una estructura de superficie de Riemann.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, tomemos un punto $p \in \Omega(G)/G$ y $q \in \Omega(G)$ tal que $P(q) = p$. Si G_q sólo consiste de la identidad, entonces existe una vecindad abierta U para q tal que $T(U) \cap U = \emptyset$ para todo $T \in G - \{I\}$. Esto dice que $P : U \rightarrow P(U)$ sirve de coordenada local. Ahora, si G_q tiene transformaciones diferente de la identidad, hemos visto anteriormente que G_q es un grupo cíclico

finito, digamos de orden N . Módulo conjugación, podemos suponer $q = 0$ y que el disco unitario D es tal que $T(D) \cap D = \emptyset$ si y sólo si $T \in G - G_q$. En este caso, $PH : D \rightarrow P(D)$, donde $H(z) = z^{1/N}$ sirve de coordenada local. Es fácil observar que los cambios de coordenadas deben ser funciones holomorfas. \square

En forma similar se tiene el siguiente:

Teorema 6.20. *Sea G un grupo Kleiniano planar en $\tilde{\mathbb{M}}$ conteniendo automorfismos antiholomorfos. Sea G^+ su subgrupo de índice dos consistiendo de las transformaciones de Möbius de G . Entonces $\Omega(G)/G$ tiene de manera natural una estructura de superficie de Klein, con borde si y sólo si G tiene reflexiones. Más aún, la superficie de Riemann $\Omega(G)/G^+$ es doble cubriente de $\Omega(G)/G$ con grupo cobertor generado por una involución antiholomorfo τ . La superficie de Klein tiene borde si y sólo si τ tiene puntos fijos; $\Omega(G)/G$ es no-orientable si y sólo si el conjunto de puntos fijos de τ no desconecta $\Omega(G)/G^+$.*

Aquellos puntos en $\Omega(G)/G$ que son proyección de los puntos con estabilizador un grupo no trivial son llamados valores de ramificación de la superficie de Klein. El orden de cada valor de ramificación es por definición el orden del estabilizador de un punto en $\Omega(G)$ que lo define. En este caso, P es un cubrimiento ramificado. Si G actúa sin puntos fijos, es decir, todo punto de $\Omega(G)$ tiene estabilizador trivial, entonces $\Omega(G)/G$ es una superficie de Klein sin valores de ramificación y P es un *cubrimiento dianalítico* [holomorfo si G sólo contiene transformaciones de Möbius].

6.11.1. Algunas Propiedades de Grupos Kleinianos. En esta subsección nos preguntaremos en lo siguiente: ¿Cuándo es un grupo de transformaciones de Möbius un grupo Kleiniano planar? Recordemos que en presencia de transformaciones extendidas de Möbius, discretitud se realiza por su subgrupo de índice dos formado por la transformación de Möbius del grupo en cuestión. Luego, nos preocuparemos mayormente en subgrupos de \mathbb{M} . Primero, consideremos la siguiente información respecto a los radios de los círculos isométricos de grupos Kleinianos planares.

Proposición 6.21. *Sea G un grupo Kleiniano planar tal que $\infty \in \Omega(G)$ y tal que todo elemento de $G - \{I\}$ no fija ∞ . Entonces, si denotamos por r_g el radio del círculo isométrico de $g \in G - \{I\}$, se tiene que*

$$\sum_{g \in G - \{I\}} r_g^4 < \infty$$

Observación 6.1. Debemos observar que si G es un grupo Kleiniano planar, entonces siempre existe un punto $p \in \Omega(G)$ que no es fijado por ningún elemento de $G - \{I\}$. Si consideramos una transformación de Möbius T tal que $T(p) = \infty$, entonces el grupo Kleiniano planar TGT^{-1} satisface las hipótesis de la proposición anterior. Ahora, la proposición dice que los radios de los círculos isométricos r_{g_n} tienden a cero para cualquier colección infinita de elementos de $g_n \in G - \{I\}$.

DEMOSTRACIÓN. Por cada $g \in G$ consideremos una matriz representante

$$g = \begin{pmatrix} a_g & b_g \\ c_g & d_g \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

La condición que $g(\infty) \neq \infty$ para $g \in G - \{I\}$ es equivalente a decir que $c_g \neq 0$. Por otro lado, el hecho que $\infty \in \Omega(G)$ y que $g(\infty) \neq \infty$ para $g \in G - \{I\}$ dice que podemos escoger un radio $R > 0$ suficientemente grande de manera que el conjunto

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R\} \cup \{\infty\}$$

tiene la propiedad que

$$g(U) \cap U = \emptyset$$

para cada $g \in G - \{I\}$.

La idea es usar el corolario 6.6 con $\mathcal{R} = U$. En efecto, sea $g \in G - \{I\}$. Denotemos por $R > \delta_g > 0$ la distancia entre U y $g^{-1}(\infty)$ (el centro del círculo isométrico de g). Tenemos la desigualdad:

$$\text{diam}(g(U)) \geq r_g^2/\delta_g \geq r_g^2/R$$

Como $g(U)$ debe ser un disco Euclideo, tenemos que su radio es mayor o igual a $r_g^2/2R$. En particular,

$$\text{Area}(g(U)) \geq (\pi/4R^2)r_g^4$$

donde Area significa area Euclidea. Ahora basta observar que para $g \neq k$, $g, k \in G - \{I\}$ se debe tener que $g(U) \cap k(U) = \emptyset$. Luego las imágenes por los elementos de $G - \{I\}$ de U es una colección disjunta dos a dos de discos Euclideos contenidos en el disco de radio R y centro el origen. Esto dice que la suma de las areas de estos es finita, es decir,

$$\infty > \sum_{g \in G - \{I\}} \text{Area}(g(U)) \geq \sum_{g \in G - \{I\}} (\pi/4R^2)r_g^4$$

obteniendo nuestro resultado. □

Observación 6.2. Este resultado asegura que si G es un grupo Kleiniano planar tal que $\infty \in \Omega(G)$ satisface no ser punto fijo de los elementos no triviales de G , entonces existe $g \in G - \{I\}$ con máximo valor de r_g (es decir, máximo radio de su círculo isométrico), equivalentemente, con mínimo valor de $c > 0$ si g es representado por una matriz

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

Corolario 6.22. Sea G un grupo Kleiniano tal que $\infty \in \Omega(G)$ y $G_\infty = \{I\}$. Denotemos por $G(\infty)$ la órbita de ∞ por la acción del grupo G . Entonces la serie

$$\sum_{g \in G} (g'(z))^2$$

converge en compactos de $\Omega(G)$ a una función meromorfa en $\Omega(G)$ que resulta ser holomorfa en $\Omega(G) - G(\infty)$ y tiene polos de orden 4 en cada punto de $G(\infty)$. En particular, sea $f : \Omega(G) \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que para cada compacto $K \subset \Omega(G)$ existe $M_K > 0$ de manera que $|f(g(z))| \leq M_K$ para todo $g \in G$ y todo $z \in K$. Entonces la serie de Poincaré

$$\sum_{g \in G} f(g(z))(g'(z))^2$$

converge uniformemente en compactos de $\Omega(G)$ a una función meromorfa G -invariante.

DEMOSTRACIÓN. Sea $K \subset \Omega(G)$ un compacto. Luego, en K sólo pueden haber un número finito de puntos de $G(\infty)$. Denotemos por $M = \{g_1, \dots, g_n\} \subset G$ aquellos elementos tales que $g_j^{-1}(\infty) \in K$. Entonces, podemos escribir

$$\sum_{g \in G} (g'(z))^2 = (g_1'(z))^2 + \dots + (g_n'(z))^2 + \sum_{g \in G-M} (g'(z))^2$$

Cada sumando $(g_j'(z))^2$ es una función meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$, holomorfa en el complemento de $g_j^{-1}(\infty)$ y con un polo de orden 4 en $g_j^{-1}(\infty)$.

Escribamos

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

Tenemos que

$$\sum_{g \in G-M} |g'(z)|^2 = \sum_{g \in G-M} \frac{1}{|c|^2} |z - g^{-1}|^{-4}$$

Como $K \subset \Omega(G)$ es compacto y tenemos $g \in G - M$, existe una constante $A > 0$ tal que $|z - g^{-1}(\infty)| > A$. Luego la convergencia de la serie

$$\sum_{g \in G-M} |g'(z)|^2$$

es consecuencia de 6.21. Esto dice que la serie

$$\sum_{g \in G-M} (g'(z))^2$$

converge absolutamente en K a una función holomorfa en K . \square

Otra consecuencia directa de 6.21 es la siguiente información respecto a los puntos límites de grupos Kleinianos planares.

Corolario 6.23. *Sea G un grupo Kleiniano planar y consideremos una sucesión $g_n \in G$ de elementos diferentes. Entonces existen puntos límites $x, y \in \Lambda(G)$ y una subsucesión g_{n_k} tal que $g_{n_k}(z)$ converge a x uniformemente en subconjuntos compactos de $\widehat{\mathbb{C}} - \{y\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Este resultado es independiente del proceso de conjugación. En particular, podemos asumir que $\infty \in \Omega(G)$ y que todo $g \in G - \{I\}$ satisface $g(\infty) \neq \infty$. Consideremos los centros de los círculos isométricos I_{g_n} de g_n y $I_{g_n^{-1}}$ de g_n^{-1} , es decir $g_n^{-1}(\infty)$ y $g_n(\infty)$. Por compacidad de la esfera de Riemann, podemos extraer una subsucesión, la cual seguiremos denotando por g_n , de manera que $g_n^{-1}(\infty)$ converge a un valor y y $g_n(\infty)$ converge a un valor x .

Sea $z \in \Omega(G)$ y consideremos una vecindad U de z de manera que $g(U) \cap U = \emptyset$ para $g \in G$ tal que $g(z) \neq z$. Por el resultado anterior, los radios de los círculos isométricos convergen a cero. Luego, podemos suponer que U esta en el exterior de todos (por la excepción de un número finito) de tales círculos.

Como g_n envía el exterior de I_{g_n} en el interior de $I_{g_n^{-1}}$, obtenemos lo deseado. \square

Corolario 6.24. *Sea G un grupo infinito. Entonces $\Lambda(G)$ es no vacío. En particular, $\Lambda(G) \neq \emptyset$ si y sólo si G es finito.*

DEMOSTRACIÓN. Si G es Kleiniano planar, entonces podemos extraer una sucesión $g_n \in G$ de elementos diferentes. Ahora usamos el resultado anterior. \square

Corolario 6.25. *Sea G un grupo Kleiniano planar. Entonces las posibilidades para $\Lambda(G)$ son las siguientes: (i) \emptyset ; (ii) un punto; (iii) dos puntos; ó (iv) infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que G es Kleiniano planar con al menos tres puntos límites. Por lo anterior, G debe ser infinito. Podemos extraer una sucesión $g_n \in G$ de elementos diferentes. Sean $x, y \in \Lambda(G)$ como en la proposición anterior. Como al menos tenemos otro punto límite, tenemos que su órbita por la sucesión g_n nos dará un número infinito de puntos límites. \square

Si G es Kleiniano planar y $\Lambda(G)$ contiene al menos tres puntos, entonces decimos que G es un *grupo no-elemental*. En caso contrario, decimos que G es un *grupo elemental*.

Hasta ahora hemos definido los puntos límites de un grupo G como aquellos puntos que no son puntos de discontinuidad de G . Verificaremos que si G es Kleiniano planar, entonces estos puntos son de hecho puntos límites de órbitas. Más precisamente:

Corolario 6.26. *Sea G un grupo Kleiniano planar y $p \in \Lambda(G)$. Entonces existe un punto $q \in \Lambda(G)$, no necesariamente diferente de p , y existe una sucesión $g_n \in G$ de elementos diferentes tal que $g_n(z)$ converge uniformemente a p en compactos de $\widehat{\mathbb{C}} - \{q\}$.*

DEMOSTRACIÓN. El resultado es independiente de conjugación, luego podemos asumir que ∞ es punto de discontinuidad de G que no es punto fijo de ninguna transformación diferente de la identidad. Como p es punto límite de G , se sigue de la definición que existe una sucesión $x_n \in \widehat{\mathbb{C}}$ convergiendo a p y existe una sucesión $g_n \in G$ de elementos diferentes tal que $g_n(x_n)$ converge a p . Podemos extraer una subsucesión de g_n y podemos encontrar puntos límites $x, y \in \Lambda(G)$ tal que $g_n(z)$ converge a x uniformemente en compactos de $\widehat{\mathbb{C}} - \{y\}$.

Si $p \neq y$, entonces tenemos que necesariamente $x = p$ y estamos listos. Si $p = y$, entonces p es límite de la órbita de ∞ . Si K es un compacto en $\Omega(G)$, entonces K vive en el exterior común de todos (con la posible excepción de un número finito) los círculos isométricos de g_n y g_n^{-1} . Como los radios de estos círculos tienden a cero, entonces estamos listos. \square

Ejercicio. Usar lo anterior para ver que si G es un grupo Kleiniano planar, entonces $\Lambda(G)$ es denso en ninguna parte, es decir, no existe abierto $V \subset \widehat{\mathbb{C}}$ de manera que $\Lambda(G) \cap V$ es denso en V .

La demostración anterior en el caso que $\Lambda(G)$ tiene infinitos puntos dice lo siguiente:

Corolario 6.27. *Sea G un grupo Kleiniano planar y $\Lambda(G)$ con al menos tres puntos. Entonces $\Lambda(G)$ es perfecto.*

Corolario 6.28. *Sea G un grupo discreto de transformaciones de Möbius. Si $p \in \Lambda(G)$, entonces existe $g_n \in G$ de elementos diferentes tal que para todo $q \in \mathbb{H}^3$ vale que $\widehat{g}_n(q)$ converge a p , donde \widehat{g}_n denota la extensión de Poincaré de g_n .*

DEMOSTRACIÓN. (1) Supongamos primero que $\Omega(G) \neq \emptyset$. En este caso existe una sucesión de elementos diferentes $g_n \in G$ y un punto $q \in \Lambda(G)$ tal que para cualquier par de puntos diferentes $u, v \in \widehat{\mathbb{C}} - \{q\}$ se tiene que $g_n(u)$ y $g_n(v)$ convergen a p . Consideremos la única geodésica $L \subset \mathbb{H}^3$ cuyos puntos finales son u y v . Es claro entonces que $\widehat{g}_n(L)$ debe converger a p . Tomemos un punto $w \in L$. Sea $z \in \mathbb{H}^3$ y sea d la distancia hiperbólica entre w y z . Como \widehat{g}_n es isometría y $\widehat{g}_n(w)$ converge a p , es claro entonces que lo mismo ocurre con $\widehat{g}_n(z)$.

(2) Supongamos ahora que $\Lambda(G) = \widehat{\mathbb{C}}$. Basta con verificar que la órbita de un punto $w \in \mathbb{H}^3$ debe contener a p como punto límite. Si no fuese esto posible, entonces debe existir un abierto U en \mathbb{R}^3

conteniendo en su interior al punto p de manera que la órbita de w está en su exterior. Ahora, para cualquier otro punto $z \in \mathbb{H}^3$. Como las extensiones de Poincaré de las transformaciones de Möbius son isometrías, debe ocurrir que la órbita de z debe mantenerse a distancia acotada de la órbita de w . En particular, p tampoco puede ser punto límite de su órbita. En consecuencia, si p no es punto límite de la órbita de un punto en \mathbb{H}^3 , entonces no está en la órbita de ningún punto de \mathbb{H}^3 . Tomemos un disco $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ tal que el espacio delimitado por la semiesfera determinada por el borde de D conteniendo a D en su borde esté completamente contenida en el abierto U . Ahora es claro que D sirve para ver que p debe ser un punto de discontinuidad de G , una contradicción. \square

Proposición 6.29 (Lema de Shimizu-Leutbecher). *Sea G un grupo discreto de transformaciones de Möbius. Si $P(z) = z + 1$ pertenece a G , entonces para toda transformación $T \in G$, $T(\infty) \neq \infty$, se tiene que el radio de su círculo isométrico es menor o igual que uno.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos por el contrario la existencia de $T \in G$, $T(\infty) \neq \infty$, con radio de su círculo isométrico mayor que uno. Usemos representantes matriciales

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

donde $ad - bc = 1$. Luego estamos asumiendo que $0 < |c| < 1$. Consideremos la sucesión

$$T_{n+1} = T_n P T_n^{-1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix},$$

con $T_0 = T$. Inductivamente uno obtiene que

- (1) $a_{n+1} = 1 - a_n c_n$;
- (2) $b_{n+1} = a_n^2$;
- (3) $c_{n+1} = -c_n^2$;
- (4) $d_{n+1} = 1 + a_n c_n$.

Relación (3) asegura que $|c_n| = |c|^{2^n}$ el cual tiende a cero cuando n tiende a infinito, en particular, la sucesión T_n consiste de elementos diferentes.

Relaciones (1) y (4) más la observación anterior aseguran que tomando $K = \text{Max}\{|a|, 1\}$ tenemos que

$$|a_n|, |d_n| \leq K \sum_{j=0}^{2^n} |c|^j < \infty$$

De esto concluimos que las sucesiones (a_n) , (b_n) , (c_n) y (d_n) son acotadas y luego podemos considerar una subsucesión de (T_n) para suponer que todas estas convergen. Luego las relaciones (1)-(4) aseguran que $a_n, b_n, d_n \rightarrow 1$ y $c_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir $T_n \rightarrow P$, contradiciendo la discretitud de G . \square

Proposición 6.30. *Sean $f, g \in \mathbb{M}$ transformaciones de Möbius, ambas diferente de la identidad. Si una de ellas es loxodrómica y ambas tienen exactamente un punto fijo en común, entonces el grupo generado por ellas es no-discreto.*

El resultado anterior dice que no hay grupos discretos de transformaciones de Möbius conteniendo transformaciones como se indica en la proposición.

DEMOSTRACIÓN. Podemos asumir que f es loxodrómico. Conjugando por una transformación de Möbius si es necesario, podemos asumir que ∞ es el punto fijo en común y que f también fija 0. Luego

$$f(z) = \lambda^2 z, \quad g(z) = az + b$$

donde

$$\lambda^2 \notin \{0, 1\} \text{ y } b \neq 0$$

Si consideramos la sucesión $T_m = f^{-m}(g(f^m(z))) = az + b/\lambda^m$, entonces haciendo tender m hacia $+\infty$ si $|\lambda| > 1$ o hacia $-\infty$ en caso contrario, obtenemos que T_m converge a $Q(z) = az$, una contradicción para la discretitud. \square

Ejercicio. Sea G un grupo Kleiniano planar que deja invariante un punto. Entonces G es elemental [Ind. Use el hecho que tal punto debe ser punto fijo de cada elemento de G].

Corolario 6.31. Sea G un grupo Kleiniano planar no-elemental y $F \neq \emptyset$ un subconjunto cerrado de la esfera de Riemann que es invariante por la acción de G . Entonces

$$\Lambda(G) \subset F$$

DEMOSTRACIÓN. Si F consiste de sólo un punto, entonces este debe ser punto fijo de toda transformación en G . La discretitud de G , el ejercicio (11) de la sección 6.5. y el resultado anterior aseguran que G es elemental. En consecuencia, F debe tener cardinalidad al menos 2. Sea $p \in \Lambda(G)$. Sabemos que existe un punto límite q y una sucesión $g_n \in G$ tal que $g_n(x)$ converge a p si $x \neq q$. Como F tiene al menos dos puntos, podemos siempre asumir $x \in F$. Por otro lado, F es invariante por G lo cual dice que la órbita de x permanece en F . Ahora el hecho que F es cerrado asegura que los puntos límites de esta órbita también viven en F , es decir $p \in F$. \square

Ejemplo 6.2. Supongamos que tenemos un grupo Kleiniano planar G y una colección Δ de componentes de $\Omega(G)$ tal que para todo $T \in G$ tenemos que $T(\Delta) \subset \Delta$. Entonces la clausura $\overline{\Delta}$ es un cerrado no vacío invariante por G . La proposición anterior asegura que $\Lambda(G) \subset \partial\Delta$ (la frontera de Δ). Por otro lado, cada punto en $\partial\Delta$ no puede vivir en $\Omega(G)$, al ser este un abierto, luego $\partial\Delta \subset \Lambda(G)$. Luego,

$$\Lambda(G) = \partial\Delta$$

Proposición 6.32 (Teorema de Jørgensen [Jørgensen]). Sean f, g transformaciones de Möbius, ambas diferente de la identidad, f loxodrómica, sin puntos fijos en común, tal que g no deja invariante el conjunto de puntos fijos de f , entonces, si $\langle f, g \rangle$ es discreto, se debe cumplir que

$$|\operatorname{tr}^2(f) - 4| + |\operatorname{tr}[f, g] - 2| \geq 1$$

donde $\operatorname{tr}(Q)$ denota la traza de una matriz en $SL(2, \mathbb{C})$ que representa la transformación de Möbius Q y $[f, g] = f^{-1}g^{-1}fg$.

6.11.2. Dominios Fundamentales. En esta subsección seguiremos más o menos fielmente el libro de B. Maskit [Maskit1].

Sea G un grupo Kleiniano planar en $\tilde{\mathbb{M}}$. Un subconjunto abierto $D \subset \Omega(G)$ es llamado un *dominio fundamental* para G si:

- (1) si $T(D) \cap D = \emptyset$, para $T \in G - \{I\}$;
- (2) $\cup_{T \in G} T(\overline{D}) = \Omega(G)$;

- (3) El borde de D , es decir ∂D , consiste de puntos límites del grupo G y un número finito o numerable de arcos simples contenidos (por la posible excepción de alguno de sus extremos) en $\Omega(G)$ llamados lados de D ;
- (4) Por cada lado s de D existe un lado s' (no necesariamente distinto a s) y una transformación $T_s \in G - \{I\}$ tal que $T_s(s) = s'$;
- (5) Para toda sucesión de lados diferentes de D , digamos s_n , se tiene que sus diámetros esféricos $diam(s_n)$ convergen a cero;
- (6) Para todo compacto $K \subset \Omega(G)$ existen sólo un número finito de $T \in G$ tales que $T(D) \cap D \neq \emptyset$ (decimos que D es localmente finito).

Observación 6.3. En (4) de la definición anterior, tenemos que condición (1) obliga a que $(s')' = s$ y $T_{s'} = T_s^{-1}$. Además, esto dice que si $s = s'$, entonces $T_s^2 = I$.

- Ejemplo 6.3.**
- (1) Sea G el grupo generado por una reflexión en un círculo \mathcal{C} . Entonces un dominio fundamental para G puede ser uno de los dos discos abiertos acotados por \mathcal{C} .
 - (2) Sea G el grupo cíclico generado por la rotación $E(z) = e^{2\pi i/k} z$, donde $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Un dominio fundamental para G puede ser tomado como el sector $\{z \in \mathbb{C} : Arg(z) \in (0, 2\pi/k)\}$.
 - (3) Sea G el grupo generado por la transformación parabólica $P(z) = z + 1$. Un dominio fundamental para G es dado por la franja $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) \in (0, 1)\}$.
 - (4) Sea G el grupo generado por la transformación loxodrómica $L(z) = \lambda e^{i\theta} z$, donde $\lambda > 1$. Entonces un dominio fundamental para G es dado por el anillo $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \lambda\}$.
 - (5) Sea G un grupo Kleiniano planar en $\tilde{\mathbb{M}}$ conteniendo automorfismos antiholomorfos. Si D es un dominio fundamental para G , entonces $D \cup T(D)$ es un dominio fundamental para G^+ , donde $T \in G - G^+$.

Ejercicio. Dar ejemplos de conjuntos abiertos de $\Omega(G)$ donde falle sólo una de las seis condiciones en la definición de dominio fundamental.

6.11.3. Región de Ford. Dado un grupo Kleiniano planar G , siempre podemos conjugarlo por una transformación de Möbius para suponer que ∞ no es punto fijo de ninguna transformación en $G - \{I\}$. En particular, para cada transformación $T \in G$, $T \neq I$ podemos calcular el círculo isométrico de esta. Cada uno de esos círculos acota un disco en la esfera de Riemann que contiene a ∞ , denotémoslo por D_T . La *Región de Ford* de este grupo G es por definición el interior de

$$\mathcal{D} = \bigcap_{T \in G - \{I\}} \overline{D_T}.$$

Ya que todo punto en $\Lambda(G)$ es acumulado por la órbita de ∞ (los centros de círculos isométricos) y los diámetros de los círculos isométricos tienden a cero, tenemos que todo punto límite no puede vivir en la región de Ford de G , es decir, este conjunto es un abierto contenido en $\Omega(G)$. La frontera de \mathcal{D} está formada por puntos límites y arcos de círculos isométricos (los cuales serán los lados de este dominio fundamental una vez que hayamos verificado que efectivamente lo es), verificando condición (3) en la definición de dominio fundamental. La observación sobre los diámetros de los círculos isométricos arriba nos da la condición (5) en la definición de dominio fundamental.

Para cada transformación T tenemos que

$$T(D_T) = \widehat{\mathcal{C}} - \overline{D_{T^{-1}}}$$

con lo cual vemos que $T(D) \cap D = \emptyset$, verificando condición (1) de la definición de dominio fundamental. También esta propiedad nos dice que vale la condición (6). En efecto, sea $K \subset \Omega(G)$ un compacto.

Supongamos que existe una sucesión $T_n \in G$ de elementos diferentes tales que $T_n(\mathcal{D}) \cap K = \emptyset$. Como los diámetros Euclidianos de $T_n(\mathcal{D})$ tienden a cero por 6.6, esto obligaría a que en K hubiese al menos un punto límite de G , una contradicción al hecho que $K \subset \Omega(G)$.

Veamos la condición (4). Sea s un lado de \mathcal{D} , luego s es un arco del círculo isométrico de una transformación $T_0 \in G$. Para cada $z \in s$ sólo pueden haber un número finito de otros círculos isométricos pasando por z ; en caso contrario, como los diámetros de una colección infinita de estos círculos tienden a cero, z sería punto límite de la órbita de ∞ , una contradicción al hecho que $s \subset \Omega(G)$. De la misma manera, la colección de puntos en s por donde pasan al menos dos círculos isométricos debe ser discreto en s . Sea $T_0(s) = s'$. Veamos que s' es también un lado de \mathcal{D} . Tomemos cualquier punto $z \in s$ por el cual no pasa otro círculo isométrico. Esto es lo mismo que decir que $|T'_0(z)| = 1$ y $|T'(z)| < 1$ para todo $T \in G - \{T_0, I\}$ (por la definición de \mathcal{D} no puede ocurrir que $|T'(z)| > 1$ para ningún $T \in G - \{I\}$). Tomemos $w = T_0(z) \in s'$. Luego, para $T \in G - \{I\}$ tenemos que

$$|T'(w)| = |T'(T_0(z))| = |(TT_0)'(z)|/|T'_0(z)| \leq 1$$

con igualdad si y sólo si $T = T_0^{-1}$. Esto nos da que w vive en la clausura de \mathcal{D} . De esta manera, s' debe ser un lado de \mathcal{D} y $T_s = T_0$.

Veamos ahora la condición (2). Queremos ver que todo punto $z \in \Omega(G)$ es equivalente a un punto en la clausura de \mathcal{D} . Es claro que todo punto $z \in \overline{\mathcal{D}} \cap \Omega(G)$ satisface esto. Sea $z \in \Omega(G) - \overline{\mathcal{D}}$ que no este en la órbita de ∞ . Luego z vive, por la posible excepción de un número finito (y que no es cero) de transformaciones de G , en D_T . En particular, existe una transformación $T_0 \in G$ con $|T'_0(z)|$ maximal. Luego, si denotamos por $w = T_0(z)$, entonces para todo $T \in G$ tenemos que

$$|T'(w)| = |T'(T_0(z))| = |(TT_0)'(z)|/|T'_0(z)| \leq 1$$

Si estamos en la situación que $|T'(w)| < 1$, para cada $T \in G - \{I\}$, entonces $w \in \mathcal{D}$. En efecto, como $w \in \Omega(G)$, para cada $R > 0$ existe sólo un número finito de elementos $T \in G$ tal que $|T'(w)| \geq R$. Esto nos dice que podemos encontrar un abierto $U \subset \Omega(G)$, $w \in U$, tal que para cada $p \in U$ vale que $|T'(p)| < 1$ para $T \in G - \{I\}$. En efecto, en caso contrario deberíamos encontrar una sucesión infinita de círculos isométricos acercándose a w . Como sus radios deben converger a cero, sus centros convergen a w mostrando que w es límite de la órbita de ∞ , una contradicción.

Por otro lado, supongamos que existe $T_1 \in G - \{I\}$ tal que $|T'_1(w)| = 1$. Si w vive en la clausura de \mathcal{D} , entonces estamos listos. Supongamos que esto no ocurre. Esto sólo es posible si por w pasan al menos tres círculos isométricos diferentes. Como la cantidad de círculos isométricos es numerable (G es numerable), la cantidad de puntos de tal tipo es numerable. En $\Omega(G)$ tal colección debe también ser discreta por el hecho que los diámetros de los círculos isométricos tienden a cero y en $\Omega(G)$ no hay puntos límites de G . Consideremos el cubrimiento ramificado holomorfo $P : \Omega(G) \rightarrow \Omega(G)/G$. Entonces $P(\overline{\mathcal{D}} \cap \Omega(G)) \subset \Omega(G)/G$ es denso en $\Omega(G)/G$. En particular, podemos encontrar una sucesión $w_n \in \mathcal{D}$ y una sucesión de elementos diferentes $T_n \in G$ tal que $T_n(w_n) \rightarrow w$. Como los diámetros de $T_n(\mathcal{D})$ tienden a cero, obtendríamos que $w \in \Lambda(G)$, una contradicción. Hemos obtenido entonces una manera de calcular dominios fundamentales para cualquier grupo Kleiniano planar:

Teorema 6.33. [Maskit1] *La Región de Ford de un grupo Kleiniano planar G tal que $T(\infty) \neq \infty$ para todo $T \in G - \{I\}$ es un dominio fundamental.*

Ejercicio. Calcular la Región de Ford para todos los grupos cíclicos Kleinianos planares.

6.11.4. Dominios de Dirichlet. Usando la extensión de Poincaré de automorfismos holomorfos/antiholomorfos de la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{H}}$ a isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 permite dar otra construcción de dominios fundamentales para grupos Kleinianos planares. Para esto, supongamos que G es un grupo discreto en $\widetilde{\mathbb{M}}$. Como G actúa como grupo discontinuo de isometrías

de \mathbb{H}^3 , entonces es posible encontrar puntos $p \in \mathbb{H}^3$ tales que $G_p = \{T \in G : T(p) = p\}$ es trivial. Tomando p uno de esos puntos, podemos hacer la siguiente construcción. Por cada $T \in G$, $T \neq I$, el subconjunto $B(T) = \{(z, t) \in \mathbb{H}^3 : d_{\mathbb{H}^3}(p, (z, t)) < d_{\mathbb{H}^3}(T(p), (z, t))\}$ es un subconjunto abierto acotado por una semiesfera que corta ortogonalmente el borde de \mathbb{H}^3 . Si consideramos la intersección

$$D(p) := \bigcap_{T \in G - \{I\}} B(T),$$

obtenemos un subconjunto de \mathbb{H}^3 llamado un *dominio de Dirichlet* de G .

Un *polihedro* en el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 (o bien en B^3) es una intersección a lo más numerable de semiespacios (regiones abiertas acotadas por semiesferas ortogonales al borde) de manera que si K es cualquier compacto de \mathbb{H}^3 , entonces sólo un número finito de tales semiesferas cortan K .

Un *polihedro fundamental* para un grupo discreto de isometrías de \mathbb{H}^3 es por definición un polihedro $D \subset \mathbb{H}^3$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

- (1) Si $g \in G$, $g \neq I$, entonces $g(D) \cap D = \emptyset$;
- (2) Si $p \in \mathbb{H}^3$, entonces existe $g \in G$ tal que $g(p)$ pertenece a la clausura de D ;
- (3) Por cada cara C de D existe una cara C' (no necesariamente diferente) y un $g_C \in G$ tal que $g_C(C) = C'$, de manera que $g_C = g_C^{-1}$.

Teorema 6.34. [Maskit1] *El dominio de Dirichlet de G resulta ser un polihedro fundamental para la acción de G en \mathbb{H}^3 . Más aún, el interior de la intersección de la clausura Euclidea de este con el borde $\partial\mathbb{H}^3 = \widehat{\mathbb{C}}$ determina un dominio fundamental para la acción de G en $\Omega(G)$.*

6.11.5. Relación entre Dominios Fundamentales y Cocientes $\Omega(G)/G$. Supongamos que G es un grupo Kleiniano planar y que D es un dominio fundamental para G . Tenemos el espacio cociente $\Omega(G)/G$ que resulta ser un espacio topológico Hausdorff. Denotemos por

$$\pi : \Omega(G) \rightarrow \Omega(G)/G$$

la proyección natural, la cual es una función continua y abierta. Por otro lado, podemos considerar la clausura de D en $\Omega(G)$, digamos $\widehat{D} = \overline{D} \cap \Omega(G)$. En esta clausura tenemos una relación de equivalencia determinada por las identificaciones de los lados de D . Denotemos el espacio cociente por \widehat{D}/G y la proyección natural por $Q : \widehat{D} \rightarrow \widehat{D}/G$. Luego, la proyección $\pi : \Omega(G) \rightarrow \Omega(G)/G$ induce de manera natural una función

$$P : \widehat{D}/G \rightarrow \Omega(G)/G$$

tal que $\pi = PQ$. Es claro que esta es una función biyectiva. Restringida a $Q(D)$, esta función es un homeomorfismo.

En general, uno no tendría por que esperar que esta función P fuese un homeomorfismo, pero el siguiente resultado dice que esto es verdad:

Teorema 6.35. [Maskit1] *Si D es un dominio fundamental (localmente finito) para el grupo Kleiniano planar G , entonces*

$$P : \widehat{D}/G \rightarrow \Omega(G)/G$$

es un homeomorfismo.

Observación 6.4. Es importante para el teorema anterior la condición "localmente finito" que hemos impuesto a la definición de dominio fundamental. Miremos el siguiente ejemplo. Sea G el grupo generado por la transformación loxodrómica $L(z) = 2z$. En este caso, $\Omega(G) = \mathbb{C} - \{0\}$. Entonces si $\mathcal{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$, tenemos que \mathcal{D}_1 es un dominio fundamental. Además, la

relación de equivalencia dada sobre este dominio nos dá como espacio cociente al toro $S^1 \times S^1$ que es exactamente una foto topológica de $\Omega(G)/G$. Por otro lado, si escogemos

$$\mathcal{D}_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{3\pi}{2}\} \cup \\ \{z \in \mathbb{C} : \frac{-1}{\text{Re}(z)+1} < \text{Im}(z) < \frac{-2}{\text{Re}(z)+1}, \frac{3\pi}{2} \leq \text{Arg}(z) < 2\pi\}$$

entonces se satisfacen todas las condiciones de dominio fundamental menos la condición de ser localmente finito. Es fácil ver que el espacio cociente de \mathcal{D}_2 por la acción de G no es compacto.

6.12. Subgrupos Kleinianos Planares

Ya habíamos observado que si G es un subgrupo de $\widehat{\mathbb{M}}$ y H es un subgrupo de índice finito en G , entonces G es discreto si y sólo si H lo es. De hecho, ahora podemos decir un poco más:

Proposición 6.36. *Sea G un grupo discreto y H un subgrupo de índice finito de G , entonces $\Omega(G) = \Omega(H)$ y $\Lambda(G) = \Lambda(H)$. En particular, G es Kleiniano planar si y sólo si H es Kleiniano planar.*

DEMOSTRACIÓN. Basta con verificar que tienen el mismo conjunto límite. Como $H < G$, es claro que $\Lambda(H) \subset \Lambda(G)$. Sea $p \in \Lambda(G)$. Como G es discreto, existe una sucesión $\{g_m\}$ de elementos diferente en G y un punto $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $g_m(z_0)$ converge a p .

Al ser H subgrupo de índice finito en G , tenemos que $G = H \cup Hx_1 \cup \dots \cup Hx_k$, donde $x_1, \dots, x_k \in G$. Luego debe existir una subsucesión infinita de $\{g_m\}$ donde todos sus transformaciones viven en el mismo Hx_j . Podemos suponer ahora que $g_m \in Hx_1$ para todo m . En este caso $g_m = h_mx_1$. Es claro que $\{h_m\}$ es una sucesión infinita de transformaciones diferentes. Ahora $h_m(x_1(z_0))$ converge a p diciendo que $p \in \Lambda(H)$. \square

Corolario 6.37. *Sea G un grupo discreto en $\widehat{\mathbb{M}}$. Entonces G es Kleiniano planar si y sólo si G^+ es Kleiniano planar.*

Proposición 6.38. *Sea G un grupo Kleiniano no-elemental (es decir, $\Lambda(G)$ tiene al menos tres puntos) y $H \neq \{I\}$ un subgrupo normal de G , entonces se tiene $\Omega(G) = \Omega(H)$ y $\Lambda(G) = \Lambda(H)$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) El grupo H no puede ser finito. En efecto, supongamos que H es finito y tomemos un elemento elíptico $h \in H$ diferente de la identidad. Podemos encontrar dos transformaciones g_1 y g_2 en G que son loxodrómicas y que no conmutan (esto por ser G no elemental). Sea $g \in \{g_1, g_2\}$ y consideremos la sucesión $h_n = g^n h g^{-n} \in H$. Como H es finito, podemos extraer una subsucesión tal que $h_n = h_0$. Esto dice entonces que g^n envía los puntos fijos de h en los puntos fijos de h_0 . Luego, g debe obligatoriamente fijar esos puntos (la órbita positiva por g de un punto que no es punto fijo de ella converge a uno de los puntos fijos). Luego, tanto g_1 como g_2 tendrían los mismos puntos fijos, una contradicción al hecho que esta no conmutan. Otra manera es la siguiente. Si $H \neq \{I\}$ fuese finito, entonces la colección de puntos fijos de los elementos de $H - \{I\}$ sería un conjunto finito no vacío, luego un conjunto cerrado no vacío. Pero el hecho que H es subgrupo normal asegura que este conjunto es también invariante por G , luego debería contener $\Lambda(G)$ por el corolario 6.31, una contradicción a la infinitud de este.

(2) Como H no es finito, $\Lambda(H) \neq \emptyset$ como consecuencia del corolario 6.23.

(3) $\Lambda(H)$ es un conjunto cerrado invariante por G .

(4) Todo conjunto cerrado no vacío por un grupo Kleiniano planar no-elemental contiene a $\Lambda(G)$, como consecuencia del corolario 6.31.

(5) En conclusión, como siempre $\Lambda(H) \subset \Lambda(G)$, lo anterior da el resultado deseado. \square

Observación 6.5. En la categoría de grupos discretos, lo anterior no siempre es cierto. Por ejemplo, si H es generado por $T(z) = -z$ y G consiste de todas las transformaciones de Möbius de la forma $Q(z) = \lambda z$, donde $\lambda \in \mathbb{R} - 0$, entonces es claro que H es subgrupo normal de G , H es discreto al ser finito y G no es discreto pues tenemos que la sucesión $Q_n(z) = (1 - 1/n)z$ converge a la identidad cuando n tiende a infinito. Pero si agregamos la hipótesis extra que en H existan al menos dos transformaciones h_1, h_2 , ambas diferente de la identidad, tal que $Fix(h_1) \neq Fix(h_2)$, entonces H es discreto si y sólo si G lo es.

6.12.1. Subgrupos de Índice Finito y Cubrimientos Ramificados. Supongamos que G es un grupo Kleiniano planar y H es un subgrupo normal de G el cual es no elemental. Entonces ambos grupos tienen la misma región de discontinuidad Ω . Sea Δ una colección de componentes de Ω que sea invariante por G . Entonces tenemos el siguiente diagrama de cubrimientos ramificados

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{P} & \Omega/H \\ & \searrow^{Q \circ P} & \swarrow_Q \\ & & \Omega/G \end{array}$$

Si tenemos que H es un subgrupo de índice finito de G , el cual no es necesariamente un subgrupo normal de G , entonces lo anterior también vale como consecuencia de la proposición anterior.

De manera recíproca, consideremos un cubrimiento (posiblemente ramificado y posiblemente no Galois) de grado d

$$\pi : S \rightarrow R$$

sobre una superficie de Riemann R de género g .

Denotemos por $B_\pi = \{q_1, \dots, q_l\} \subset R$ al conjunto de los valores de ramificación de π (en caso de existir). Por cada punto q_j tenemos su preimágen

$$\pi^{-1}(q_j) = \{p_1^j, \dots, p_{k_j}^j\}$$

y denotemos por $d_{m,j}$ al grado de π en el punto p_m^j . Sea

$$b_j = mcm(d_{1,j}, \dots, d_{k_j,j})$$

Escojamos puntos $x_1, \dots, x_t \in R - B_\pi$ y valores enteros $a_1, \dots, a_t \geq 2$. Consideremos el orbifold definido por R con puntos especiales dados por $q_1, \dots, q_l, x_1, \dots, x_t$ y con valores de ramificación dados por $b_1, \dots, b_l, a_1, \dots, a_t$, respectivamente. Esta orbifold es uniformizada por un grupo

$$\Gamma < Isom_+(\widehat{R})$$

donde

$$\widehat{R} \in \{\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{H}^2\}$$

$$\Gamma = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g, z_1, \dots, z_l, w_1, \dots, w_t : \prod_{j=1}^g [\alpha_j, \beta_j] \prod_{i=1}^l z_i \prod_{k=1}^t w_k = 1, z_1^{b_1} = \dots = z_l^{b_l} = w_1^{a_1} = \dots = w_t^{a_t} = 1 \rangle$$

Consideremos

$$(1) \widehat{R}^* = \widehat{R} - \pi_\Gamma^{-1}\{q_1, \dots, q_l, x_1, \dots, x_t\}$$

- (2) $S^* = S - \pi^{-1}\{q_1, \dots, q_l, x_1, \dots, x_t\}$
 (3) $R^* = R - \{q_1, \dots, q_l, x_1, \dots, x_t\}$

Proposición 6.39. *Supongamos que las tres superficies de Riemann R^* , S^* y \widehat{R}^* tienen el mismo cobertor universal. Entonces existe $K < \Gamma$ (posiblemente con torsión) de índice $[\Gamma : K] = d$ tal que $S = \widehat{R}/K$ (con posibles singularidades) and π factoriza a través K en Γ , es decir, si denotamos por $\pi_\Gamma : \widehat{R} \rightarrow R$ el cubrimiento (ramificado) universal definido por Γ y por $\pi_K : \widehat{R} \rightarrow S$ el cubrimiento (ramificado) definido por K , entonces $\pi_\Gamma = \pi \circ \pi_K$. Más aún, si π es Galois, entonces K es subgrupo normal de Γ .*

Observación 6.6. El orbifold \widehat{R}/K es S con unos puntos ramificados, provenientes de la preimágen por π de los puntos $x_1, \dots, x_t, q_1, \dots, q_l$.

DEMOSTRACIÓN. Sea \widetilde{R} el cobertor universal de \widehat{R}^* . Entonces tenemos un grupo L de isometrías de \widetilde{R} (infinitamente generado por transformaciones parabólicas en caso que $l + t > 0$), subgrupos N, Q de L , donde N es subgrupo normal tal que $\Gamma = L/N$ y Q de índice d tal que $S^* = \widetilde{R}/Q$. Si denotamos por $\pi_Q : \widetilde{R} \rightarrow S$, $\pi_N : \widetilde{R} \rightarrow \widehat{R}^*$ y $\pi_L : \widetilde{R} \rightarrow R^*$ los respectivos cubrimientos definidos por esos grupos, entonces tenemos que:

$$\pi \circ \pi_Q = \pi_L = \pi_\Gamma \circ \pi_N$$

En este punto observemos que si $\pi : S \rightarrow R$ es Galois, entonces Q también es subgrupo normal de L y π es definido por el grupo de automorfismos L/Q de S .

Por cada $j = 1, \dots, l$ (respectivamente, cada $i = 1, \dots, t$) escogemos un camino cerrado simple δ_j (respectivamente, θ_i) que rodee la pinchadura definida por q_j (respectivamente, x_i) y defina el borde de un disco pinchado (es decir, no rodee otras pinchaduras).

Observemos que el cubrimiento planar $\pi_\Gamma : \widehat{R}^* \rightarrow R^*$ es el cubrimiento planar más bajo para el cual $\delta_1^{b_1}, \dots, \delta_l^{b_l}, \theta_1^{a_1}, \dots, \theta_t^{a_t}$ se levantan en caminos cerrados. Esta es la definición del grupo normal N en L .

Por la definición de los valores b_1, \dots, b_l y el hecho que x_1, \dots, x_t no son valores de ramificación de π , tenemos que las curvas anteriores también se levantan en caminos cerrados en S^* por el cubrimiento $\pi : S^* \rightarrow R^*$. Esto ahora nos está diciendo que necesariamente $N < Q$. Ya que N es subgrupo normal de L , entonces N es subgrupo normal de Q . Tenemos de esta manera un cubrimiento Galois $\pi_{Q/N} : \widehat{R}^* \rightarrow S^*$.

Ahora tenemos

$$\pi \circ \pi_{Q/N} = \pi_\Gamma$$

Ya que cada pinchadura en R^* se levanta en una pinchadura tanto en S^* como en \widehat{R}^* con grados finitos (localmente), podemos extender $\pi_{Q/N}$ como un cubrimiento (posiblemente ramificado) desde $\pi_{Q/N} : \widehat{R} \rightarrow S$ de manera que sigamos teniendo la igualdad anterior. El subgrupo $K = Q/N < L/N = \Gamma$ es el buscado. □

6.12.1.1. Aplicación. Consideremos un par de cubrimientos (posiblemente con ramificaciones y posiblemente no Galois) sobre una misma superficie de Riemann R , digamos:

$$\pi_1 : S_1 \rightarrow R, \quad \pi_2 : S_2 \rightarrow R$$

de manera que sus conjuntos de valores de ramificación en R sean disjuntos, es decir,

$$B_{\pi_1} \cap B_{\pi_2} = \emptyset$$

La proposición anterior nos dice que existe un grupo de isometrías Γ con subgrupos K_1, K_2 , donde K_j tiene índice d_j (el grado del cubrimiento ramificado π_j) y π_j es dado por la acción de K_j . Como K_1 y K_2 tienen índice finito en Γ , tenemos que $K_1 \cap K_2$ también tiene índice finito en Γ . Luego el orbifold S uniformizado por $K_1 \cap K_2$ define un cobertor común de S_1 y de S_2 .

Si tomamos la intersección de todas las clases de conjugación de $K_1 \cap K_2$ obtendremos un subgrupo normal de índice finito (pues es de hecho la intersección finita de subgrupos de índice finito ya que $K_1 \cap K_2$ tiene índice finito). De esta manera podemos encontrar un cobertor común de S_1 y de S_2 que es Galois.

Cubrimientos Homológicos

7.1. Jacobianas y Matrices de Riemann

Consideremos una superficie de Riemann S de género $g \geq 1$. Denotemos por $H_1(S, \mathbb{Z}) \cong \oplus^{2g} \mathbb{Z}$ al primer grupo de homología de S . Este grupo codifica (en parte) la parte topológica de la superficie S . Una base de homología de S es una *base simpléctica* si está representada por $2g$ curvas cerradas orientadas, $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$, tal que

$$\begin{aligned}\alpha_j \cdot \alpha_k &= \beta_j \cdot \beta_k = 0 \\ \alpha_j \cdot \beta_k &= \delta_{jk}\end{aligned}$$

También asociado a S es el espacio vectorial complejo de dimensión g de las 1-formas holomorfas [Farkas-Kra], denotado por $H^{1,0}(S)$. Existe una base de este espacio, digamos w_1, \dots, w_g , satisfaciendo que

$$\int_{\alpha_j} w_k = \delta_{jk}$$

llamada una base dual a la base simpléctica anterior. En este espacio tenemos una forma Hermitiana positiva definida dada por:

$$(\theta_1, \theta_2) = \frac{i}{2} \int \int_S \theta_1 \wedge \overline{\theta_2} = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^g \left[\int_{\alpha_j} \theta_1 \overline{\int_{\beta_j} \theta_2} - \int_{\beta_j} \theta_1 \overline{\int_{\alpha_j} \theta_2} \right]$$

para $\theta_1, \theta_2 \in H^{1,0}(S)$. Por ejemplo, para la base dual w_1, \dots, w_g anterior tenemos que

$$(w_j, w_k) = \text{Im} \left(\int_{\beta_j} w_k \right)$$

Luego, esta forma Hermitiana queda representada en esta base dual como

$$((x_1, \dots, x_g), (y_1, \dots, y_g)) = \sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^g x_j \overline{y_k} \text{Im} \left(\int_{\beta_j} w_k \right)$$

Si denotamos por $H^{1,0}(S)^*$ el espacio dual de $H^{1,0}(S)$, entonces la forma Hermitiana anterior nos da un anti-isomorfismo

$$\Psi : H^{1,0}(S) \rightarrow H^{1,0}(S)^*$$

definido por

$$\Psi(\theta) = (\cdot, \theta)$$

De esta manera, tenemos inducida la forma Hermitiana

$$(\Psi(\theta_1), \Psi(\theta_2)) = \overline{(\theta_1, \theta_2)}$$

Integración de 1-formas sobre curvas (orientadas) en S da la función

$$\Phi_S : H_1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow (H^{1,0}(S))^*$$

definida por

$$\phi([\gamma]) = \int_{\gamma}$$

Ejercicio. Verificar que esta función es un homomorfismo inyectivo entre \mathbb{Z} -módulos. La base dual en $H^{1,0}(S)^*$ respecto a la base w_1, \dots, w_g es exactamente la dada por $w_1^* = \int_{\alpha_1}, \dots, w_g^* = \int_{\alpha_g}$

De esta manera, la forma Hermitiana inducida en $H^{1,0}(S)^*$ en la base dual queda dada por

$$((x_1, \dots, x_g), (y_1, \dots, y_g)) = \sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^g \overline{x_j} y_k \operatorname{Im} \left(\int_{\beta_j} w_k \right)$$

Se puede ver $H_1(S, \mathbb{Z})$ como un reticulado en el espacio $(H^{1,0}(S))^*$. El cociente

$$J(S) = (H^{1,0}(S))^* / H_1(S, \mathbb{Z})$$

es la *Jacobiana* de S , la cual resulta ser una variedad Abelianamente principalmente polarizada (ver la primera parte de este libro).

Usando la base simpléctica $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ y su base dual w_1, \dots, w_g de 1-formas holomorfas en S , uno puede escribir lo anterior en coordenadas. Esto es, si usamos la base dual w_1^*, \dots, w_g^* para el espacio $(H^{1,0}(S))^*$, entonces podemos identificar $(H^{1,0}(S))^*$ con $\widehat{\mathbb{C}}^g$ y el reticulado $H_1(S, \mathbb{Z})$ se identifica con un reticulado L en $\widehat{\mathbb{C}}^g$ generado por los vectores $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_g = (0, \dots, 0, 1)$, $z_1 = (z_{1,1}, \dots, z_{g,1}), \dots, z_g = (z_{1,g}, \dots, z_{g,g})$, donde

$$z_{kj} = \int_{\beta_j} w_k = \int_{\beta_k} w_j$$

La matriz $Z = (z_1 z_2 \cdots z_g)$ es llamada una *matriz de Riemann* para S . Luego $J(S)$ es analíticamente equivalente a la variedad abeliana principalmente polarizada obtenida como $\widehat{\mathbb{C}}^g / L$ con la polarización dada por

$$((x_1, \dots, x_g), (y_1, \dots, y_g)) = \sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^g \overline{x_j} y_k \operatorname{Im}(z_{jk})$$

Observación 7.1. Denotemos por $Pic^0(S)$ el espacio de las clases de divisores de grado cero en S (un divisor de grado cero es trivial si es el divisor de una función meromorfa en S). Tomemos un punto $p_0 \in S$. El teorema de Abel [Farkas-Kra] dice que la función

$$H : Pic^0(S) \rightarrow J(S)$$

definida por

$$H(p_1 + \cdots + p_g - q_1 - \cdots - q_g) = \left[\int_{p_0}^{p_1} + \cdots + \int_{p_0}^{p_g} - \int_{p_0}^{q_1} - \cdots - \int_{p_0}^{q_g} \right]$$

resulta ser un isomorfismo.

7.2. Variedades de Prym

Supongamos que tenemos un cubrimiento ramificado $\pi : R \rightarrow S$ entre dos superficies de Riemann R y S , de géneros γ y g , respectivamente. Asociado a este cubrimiento tenemos asociado el siguiente

diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H}_1(R, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\Phi_R} & \mathbb{H}^{1,0}(R)^* & \xrightarrow{P_R} & J(R) \\ \mathbb{H}_1(\pi) \downarrow & & \mathbb{H}^{1,0}(\pi)^* \downarrow & & J(\pi) \downarrow \\ \mathbb{H}_1(S, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\Phi_S} & \mathbb{H}^{1,0}(S)^* & \xrightarrow{P_S} & J(S) \end{array}$$

donde

$$\mathbb{H}_1(\pi) : \mathbb{H}_1(R, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{H}_1(S, \mathbb{Z})$$

es el homomorfismo inducido por $\pi : R \rightarrow S$ al nivel del primer grupo de homología;

$$\mathbb{H}^{1,0}(\pi)^* : \mathbb{H}^{1,0}(R)^* \rightarrow \mathbb{H}^{1,0}(S)^*$$

es la función lineal sobreyectiva inducida a nivel del dual de la formas holomorfas;

$$J(R) = \mathbb{H}^{1,0}(R)^* / \Phi_R(\mathbb{H}_1(R, \mathbb{Z})) \quad J(S) = \mathbb{H}^{1,0}(S)^* / \Phi_S(\mathbb{H}_1(S, \mathbb{Z}))$$

son las variedades Jacobianas de R y S , respectivamente;

$$J(\pi) : J(R) \rightarrow J(S)$$

es el homomorfismo sobreyectivo inducido sobre las Jacobianas;

$$P_R : \mathbb{H}^{1,0}(R)^* \rightarrow J(R), \quad P_S : \mathbb{H}^{1,0}(S)^* \rightarrow J(S)$$

son las proyecciones naturales sobre las respectivas Jacobianas.

Ahora, si bien puede ocurrir que $\mathbb{H}_1(\pi) : \mathbb{H}_1(R, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{H}_1(S, \mathbb{Z})$ no es necesariamente sobreyectiva, tenemos que, al ser $\pi : R \rightarrow S$ de grado finito, el cociente

$$K = \mathbb{H}_1(S, \mathbb{Z}) / \mathbb{H}_1(\pi)(\mathbb{H}_1(R, \mathbb{Z}))$$

es un grupo Abelianiano finito. Consideremos los reticulados

$$\Lambda_1 = \text{Ker}(\mathbb{H}^{1,0}(\pi)^*) \cap \Phi_R(\mathbb{H}_1(R, \mathbb{Z}))$$

$$\Lambda_2 = \text{Ker}(\mathbb{H}^{1,0}(\pi)^*)^\perp \cap \Phi_R(\mathbb{H}_1(R, \mathbb{Z}))$$

y los subespacios

$$V_1 = \text{Ker}(\mathbb{H}^{1,0}(\pi)^*)$$

$$V_2 = \text{Ker}(\mathbb{H}^{1,0}(\pi)^*)^\perp$$

donde la ortogonalidad es tomada respecto a la forma Hermitiana definida en $\mathbb{H}^{1,0}(R)^*$. Denotemos por

$$\widetilde{\text{Prym}}(\pi : R \rightarrow S) = P_R((\mathbb{H}^{1,0}(\pi)^*)^{-1}(\Phi_S(\mathbb{H}_1(S, \mathbb{Z}))))$$

al núcleo del homomorfismo sobreyectivo de grupo $J(\pi)$. Este puede ser no conexo. La componente conexa de este subgrupo que contiene a $0 \in J(R)$ es denotada por

$$\text{Prym}(\pi : R \rightarrow S)$$

y llamada la *variedad de Prym* del cubrimiento $\pi : R \rightarrow S$. No es difícil ver que

$$\begin{aligned} \text{Prym}(\pi : R \rightarrow S) &= P_R(V_1) \\ &= V_1 / \Lambda_1 \end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned} \widehat{J(S)} &:= P_R(V_2) \\ &= V_2 / \Lambda_2 \end{aligned}$$

Usando los siguientes hechos:

- (i) $H^{1,0}(\pi)^* : V_2 \rightarrow H^{1,0}(S)^*$ es un isomorfismo, y
- (ii) $H^{1,0}(\pi)^*(\Lambda_2)$ es un submódulo de $\Phi_S(H_1(S, \mathbb{Z}))$ tal que $\Phi_S(H_1(S, \mathbb{Z}))/H^{1,0}(\pi)^*(\Lambda_2) = K$,

obtenemos que

$$\widehat{J(S)}/K = J(S),$$

es decir, que $\widehat{J(S)}$ es isógena a $J(S)$, con núcleo dado por K .

Por otro lado, Λ_1 y Λ_2 generan en $\Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z}))$ un subreticulado Λ del mismo rango. Tenemos que:

- (1) Si $\Lambda = \Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z}))$, entonces

$$J(R) = \text{Prym}(\pi : R \rightarrow S) \times \widehat{J(S)}$$

lo cual dice que tenemos un isomorfismo de variedades abelianas, donde las polarizaciones en $\text{Prym}(\pi : R \rightarrow S)$ y $\widehat{J(S)}$ son las inducidas por la polarización en $J(R)$;

- (2) Si $\Lambda \neq \Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z}))$, entonces

$$J(R) = (\text{Prym}(\pi : R \rightarrow S) \times \widehat{J(S)})/(\Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z}))/\Lambda)$$

lo cual dice que $J(R)$ es isógena al producto

$$\text{Prym}(\pi : R \rightarrow S) \times \widehat{J(S)}$$

con núcleo dado por el grupo abeliano finito $\Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z}))/\Lambda$.

En particular, cuando $K = \{0\}$ y $\Lambda = \Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z}))$, tenemos que

$$J(R) = \text{Prym}(\pi : R \rightarrow S) \times J(S)$$

Lo anterior puede ser visto del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & H^{1,0}(R)^* = V_1 + V_2 & \\
 \Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z})) \swarrow & & \searrow \Lambda \\
 J(R) & \xrightarrow{\Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z}))/\Lambda} & \text{Prym}(\pi : R \rightarrow S) \times \widehat{J(S)} \\
 \downarrow J(\pi) & & \downarrow \pi_2 \\
 J(S) & \xrightarrow{K} & \widehat{J(S)}
 \end{array}$$

donde $\pi_2 : \text{Prym}(\pi : R \rightarrow S) \times \widehat{J(S)} \rightarrow \widehat{J(S)}$ es la proyección en la segunda coordenada. Es decir, la función $J(\pi) : J(R) \rightarrow J(S)$ es isógena a la proyección π_2 .

Ejemplo 7.1. Consideremos R un toro, es decir una superficie de Riemann de género uno. Tomemos en R un automorfismo $\tau : R \rightarrow R$ de orden dos y sin puntos fijos. Sea $S = R/\tau$ el toro cociente y denotemos por $\pi : R \rightarrow S$ al cubrimiento holomorfo no ramificado de grado dos inducido por la acción de τ . En este caso, podemos escoger una base simpléctica $\{\alpha, \beta\}$ para R tal que $\tau(\alpha) = \alpha$ y $\tau(\beta) = \beta$. Escojamos $\delta = \pi(\alpha)$ y $\eta = \pi(\beta)$. Entonces, $\{\delta, \eta\}$ da una base simpléctica para S . En este

caso, $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $H^{1,0}(\pi)^*$ es un isomorfismo. Tomemos w la base dual de $H^{1,0}(R)$ y θ la base dual de $H^{1,0}(S)$, respecto a las bases simplécticas anteriores. Denotando por

$$\tau_R = \int_{\beta} w, \quad \tau_S = \int_{\eta} \theta$$

uno obtiene que

$$2\tau_S = \tau_R$$

De esta manera, usando las bases duales w^* en $H^{1,0}(R)^*$ y θ^* en $H^{1,0}(S)^*$, tenemos que $H^{1,0}(\pi)^*(x) = x$. En particular,

$$(H^{1,0}(\pi)^*)^{-1}(\Phi_S(H_1(S, \mathbb{Z}))) = \{n + m\tau_S; n, m \in \mathbb{Z}\} = \{n + (m/2)\tau_R; n, m \in \mathbb{Z}\}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Prym}}(\pi : R \rightarrow S) &= \langle p; 2p = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \text{Prym}(\pi : R \rightarrow S) &= \{0\} \\ \widehat{J(S)}/K &= J(S) = S \\ R &= J(R) = \widehat{J(S)} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.2. Consideremos una superficie de Riemann R de género $g = 2\gamma$ junto a una involución conformal $\tau : R \rightarrow R$, es decir un automorfismo conformal de R de orden dos, tal que τ tiene exactamente dos puntos fijos. En este caso, $S = R/\tau$ es una superficie de Riemann de género γ con exactamente dos puntos de ramificación de orden dos. Denotemos por $\pi : R \rightarrow S$ el cubrimiento ramificado de grado dos inducido por la acción de τ . Podemos escoger una base symplectica de R , digamos

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}$$

y una base symplectica de S , digamos

$$\{\delta_1, \dots, \delta_\gamma, \eta_1, \dots, \eta_\gamma\}$$

de manera que valen las siguientes igualdades:

- (1) $H_1(\pi)(\alpha_j) = H_1(\pi)(\alpha_{\gamma+j}) = \delta_j, j = 1, \dots, \gamma;$
- (2) $H_1(\pi)(\beta_j) = H_1(\pi)(\beta_{\gamma+j}) = \eta_j, j = 1, \dots, \gamma;$

Denotemos por $\{w_1, \dots, w_g\}$ la base dual de $H^{1,0}(R)$ respecto a $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$ y por $\{\theta_1, \dots, \theta_\gamma\}$ a la base dual de $H^{1,0}(S)$ respecto a la base $\{\delta_1, \dots, \delta_\gamma\}$. Igualdad (1) arriba asegura que

- (3) $H^{1,0}(\theta_j) = w_j + w_{\gamma+j}, j = 1, \dots, \gamma.$

Denotemos por $\tau_{jk} = \tau_{kj} = \int_{\beta_j} w_k$ y por $s_{jk} = s_{kj} = \int_{\eta_j} \theta_k$. Entonces las matrices de Riemann de R y S , en las bases symplecticas anteriores, son dadas por

$$Z_R = (\tau_{jk}); \quad Z_S = (s_{jk})$$

respectivamente. Igualdad (2) nos da las siguientes igualdades:

- (4) $\tau_{j \gamma+k} = \tau_{k \gamma+j}, 1 \leq j \leq k \leq \gamma;$
- (5) $\tau_{j \gamma+k} = s_{jk} - \tau_{jk}, 1 \leq j \leq k \leq \gamma;$
- (6) $\tau_{\gamma+j \gamma+k} = \tau_{jk}, 1 \leq j \leq k \leq \gamma.$

Igualdades (4)-(6) nos dicen que

$$Z_R = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_S - Z_1 \\ Z_S - Z_1 & Z_1 \end{bmatrix}$$

donde Z_1 es submatriz $\gamma \times \gamma$ de Z_R .

Identifiquemos $H^{1,0}(R)^*$ con \mathbb{C}^g y $H^{1,0}(S)^*$ con \mathbb{C}^γ , de manera que \int_{α_j} es identificada con el vector canónico $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, donde el 1 va en la posición $j \in \{1, \dots, g\}$, y de manera que \int_{δ_k} es identificada con el vector canónico $E_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, donde el 1 va en la posición $k \in \{1, \dots, \gamma\}$. Nuestra función $H^{1,0}(\pi)^* : H^{1,0}(R)^* \rightarrow H^{1,0}(S)^*$ se puede identificar con la función

$$Q : \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}^\gamma : (x_1, \dots, x_g) \mapsto (x_1 + x_{\gamma+1}, x_2 + x_{\gamma+2}, \dots, x_\gamma + x_{2\gamma})$$

Luego, el núcleo de $H^{1,0}(\pi)^*$ es identificado con el núcleo V_1 de Q el cual es generado por los vectores

$$e_1 - e_{\gamma+1}, e_2 - e_{\gamma+2}, \dots, e_\gamma - e_{2\gamma}$$

y luego la intersección del reticulado definido por $H_1(R, \mathbb{Z})$ se identifica con el reticulado de V_1 generado por los vectores

$$e_1 - e_{\gamma+1}, \dots, e_\gamma - e_{2\gamma}, \tau_1 - \tau_{\gamma+1}, \dots, \tau_\gamma - \tau_{2\gamma},$$

donde τ_j representa la columna j -ésima de Z_R . En particular, si identificamos V_1 con \mathbb{C}^γ de manera que $e_j - e_{\gamma+j}$ es identificado con E_j , $j = 1, \dots, \gamma$, obtenemos que la matriz de Riemann asociada a la variedad $\text{Prym}(\pi : R \rightarrow S)$ es dada por

$$Z_{\text{Prym}(\pi:R \rightarrow S)} = 2Z_1 - Z_S$$

No es difícil ver que la polarización de $\text{Prym}(\pi : R \rightarrow S)$ que es inducida por la de $J(R)$ es dos veces la principal.

En la construcción hecha en el ejemplo anterior, podemos fijar la superficie de Riemann S y sólo variar sus puntos de ramificación de manera que ellos tienden a ser el mismo punto $p \in S$. En esta degeneración, la superficie R tiende a una superficie estable con exactamente un nodo que divide esta en dos superficies, cada una de ellas siendo equivalente holomórficamente a la superficie $S - \{p\}$. Esta degeneración hace que la matriz Z_R tienda a una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

es decir, Z_1 tiende a la matriz Z_S y, en particular, $Z_{\text{Prym}(\pi:R \rightarrow S)} = 2Z_1 - Z_S$ tiende a Z_S . Esto dice que Z_S vive en la clausura de las matrices $Z_{\text{Prym}(\pi:R \rightarrow S)}$ en el espacio de Siegel \mathcal{H}_γ . Si denotamos por Jac el sublocus de \mathcal{H}_γ que consiste de las matrices de Riemann de las superficies de Riemann de género γ , entonces usando el hecho que para $\gamma \in \{2, 3\}$ vale que Jac es un abierto de \mathcal{H}_γ , obtenemos la siguiente observación:

Observación 7.2. Para $\gamma = 2, 3$ tenemos que infinitas variedades de Prym son en efecto jacobianas de superficies de Riemann.

7.3. Automorfismos de Superficies de Riemann y Jacobianas

Supongamos ahora que $f : S \rightarrow S$ es un automorfismo holomorfo/antiholomorfo de la superficie de Riemann S . Este automorfismo induce un automorfismo

$$J(f) : J(S) \rightarrow J(S)$$

en $J(S)$ que es holomorfo (respectivamente, antiholomorfo) si f es holomorfo (respectivamente, antiholomorfo) que es dada tal que

$$Q_f = H^{-1}J(f)H : Pic^0(S) \rightarrow Pic^0(S)$$

es dada por

$$Q_\tau(p_1 + \dots + p_g - q_1 - \dots - q_g) = f(p_1) + \dots + f(p_g) - f(q_1) - \dots - f(q_g)$$

Dada una base simpléctica para S , digamos $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$, uno puede representar la acción de f a nivel de la homología $H_1(S, \mathbb{Z})$ por una matriz simpléctica (extendida) $A_f \in \widetilde{\text{Sp}}(2g, \mathbb{Z})$, donde

$$\widetilde{\text{Sp}}(2g, \mathbb{Z}) = \{N \in \text{GL}(2g, \mathbb{Z}) : {}^t N J N = \pm J\},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Más aún, si denotamos por $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ el grupo simpléctico, el subgrupo de índice dos de $\widetilde{\text{Sp}}(2g, \mathbb{Z})$ de matrices N tales que ${}^t N J N = J$, entonces tenemos que $A_f \in \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ si y sólo si f es holomorfo. Esto es debido al hecho que la forma de intersección se preserva por automorfismos que preservan la orientación y es revertida por automorfismos que revierten la orientación.

Denotemos por $Z \in \mathcal{H}_g$ la matriz de Riemann de S en la base simpléctica escogida. Supongamos que la matriz A_f es dada por

$$A_f = \begin{pmatrix} U & V \\ W & L \end{pmatrix},$$

entonces debemos tener que

- (1) Si f es holomorfo, entonces:

$$(U + ZW)^{-1} (V + ZL) = Z,$$

- (2) Si f es antiholomorfo, entonces:

$$(U + \bar{Z}W)^{-1} (V + \bar{Z}L) = Z.$$

Ahora, supongamos que cambiamos la base simpléctica $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}$ por una nueva base simpléctica $\{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_g, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_g\}$. Es decir, escogemos una matriz simpléctica

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix},$$

satisfaciendo

$$(\alpha\beta)Q = (\tilde{\alpha}\tilde{\beta})$$

donde $\alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_g)$, $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1 \cdots \tilde{\alpha}_g)$, $\beta = (\beta_1 \cdots \beta_g)$ and $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1 \cdots \tilde{\beta}_g)$. Entonces la matriz del automorfismo f en esta nueva base es dada por

$$Q^{-1} A_f Q.$$

Ahora, si $\{w_1, \dots, w_g\}$ es la base dual a $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$, entonces la base dual a la nueva base simpléctica es dada por $\{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_g\}$, donde

$$(Q_{11} + ZQ_{21})^{-1} w = \tilde{w}$$

para $w = {}^t(w_1 \cdots w_g)$ y $\tilde{w} = {}^t(\tilde{w}_1 \cdots \tilde{w}_g)$. En particular, la matriz de Riemann de la superficie en la nueva base es dada por

$$\tilde{Z} = Q(Z) = (Q_{11} + ZQ_{21})^{-1} (Q_{12} + ZQ_{22})$$

Como aplicación de esto es que si A, Q son matrices simplécticas y Z es matriz de Siegel fija por A , entonces $Q(Z)$ es matriz fija por $Q^{-1} A Q$.

7.4. Superficies de Klein y Jacobianas

Consideremos una superficie de Klein compacta R , posiblemente con borde. Tomemos su cubrimiento doble orientable $P : S \rightarrow R$, donde S es ahora una superficie de Riemann compacta sin borde, la cual asumiremos es de género $g \geq 1$ (este valor es también llamado el género algebraico de R). Además, existe una involución antiholomorfo $\tau : S \rightarrow S$, actuando con puntos fijos sólo si R tiene borde, tal que τ genera el grupo de cubrimiento de P .

Ejercicio. Verificar que $J(\tau) : J(S) \rightarrow J(S)$ actúa sin puntos fijos si y sólo si $\tau : S \rightarrow S$ actúa sin puntos fijos. En caso que τ tiene $k \geq 1$ componentes de puntos fijos en S , se tiene que el número de componentes de puntos fijos de $J(\tau)$ es 2^{k-1} , cada componente un toro real g -dimensional.

Cada componente del conjunto de puntos fijos de τ es una geodésica simple cerrada y la cantidad de esas componentes es:

- (i) \emptyset si $\partial R = \emptyset$; ó
- (ii) k si $\#\partial R = k$.

Denotemos por $Z \in \mathcal{H}_g$ la matriz de Riemann de S en la base simpléctica escogida. Supongamos que la matriz $\hat{\tau}$ es dada por

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} U & V \\ W & L \end{pmatrix},$$

entonces debemos tener que

$$(U + \bar{Z}W)^{-1} (V + \bar{Z}L) = Z.$$

Caso 1: Supongamos que $\tau : S \rightarrow S$ actúa sin puntos fijos y que g es par. Entonces es posible escoger la base simpléctica de manera que para $k = 1, \dots, \frac{g}{2}$ valga

- (a) $\tau(\alpha_k) = \alpha_{\frac{g}{2}+k}$,
- (b) $\tau(\beta_k) = -\beta_{\frac{g}{2}+k}$.

En tal base, tenemos que

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & -I & 0 \end{pmatrix},$$

donde I y 0 representan las matrices identidad y nula de tamaño $\frac{g}{2} \times \frac{g}{2}$. Así, la matriz Z debe ser de la forma $Z = X + iY$, donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & -x_1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} {}^t x_1 &= x_1, \\ {}^t x_2 &= -x_2, \\ {}^t y_1 &= y_1, \\ {}^t y_2 &= y_2, \end{aligned}$$

son matrices de tamaño $\frac{g}{2} \times \frac{g}{2}$.

Caso 2: Supongamos que $\tau : S \rightarrow S$ actúa sin puntos fijos y que g es impar. Entonces es posible escoger la base simpléctica de manera valga

- (a) $\tau(\alpha_k) = \alpha_{\frac{g-1}{2}+k}$, para $k = 1, \dots, \frac{g-1}{2}$

- (b) $\tau(\beta_k) = -\beta_{\frac{g-1}{2}+k}$, para $k = 1, \dots, \frac{g-1}{2}$
- (c) $\tau(\alpha_g) = \alpha_g$
- (d) $\tau(\beta_g) = -\beta_g$

En tal base, tenemos que

$$\widehat{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde I es la matriz identidad de tamaño $\frac{g-1}{2} \times \frac{g-1}{2}$.

Así, la matriz Z debe ser de la forma $Z = X + iY$, donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2 & -x_1 & -x_3 \\ {}^t x_3 & -{}^t x_3 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_1 & y_3 \\ {}^t y_3 & {}^t y_3 & y_6 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} {}^t x_1 &= x_1, \\ {}^t x_2 &= -x_2, \\ {}^t y_1 &= y_1, \\ {}^t y_2 &= y_2, \end{aligned}$$

son matrices de tamaño $\frac{g-1}{2} \times \frac{g-1}{2}$, y además $y_3 > 0$.

Caso 3: Supongamos que $\tau : S \rightarrow S$ actúa con puntos fijos y que estos dividen S . En este caso, si k denota la cantidad de componentes conexas de puntos fijos de τ , entonces $g = 2\gamma + k - 1$. Entonces es posible escoger la base simpléctica de manera valga

- (a) $\tau(\alpha_t) = \alpha_{\gamma+t}$, para $t = 1, \dots, \gamma$
- (b) $\tau(\beta_t) = -\beta_{\gamma+t}$, para $t = 1, \dots, \gamma$
- (c) $\tau(\alpha_{2\gamma+u}) = \alpha_{2\gamma+u}$, para $u = 1, \dots, g - 2\gamma$
- (d) $\tau(\beta_{2\gamma+u}) = -\beta_{2\gamma+u}$, para $u = 1, \dots, g - 2\gamma$

En tal base, tenemos que

$$\widehat{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_2 \end{pmatrix},$$

donde I es la matriz identidad de tamaño $\gamma \times \gamma$ y la matriz I_2 es la matriz de tamaño $(g-2\gamma) \times (g-2\gamma)$.

Así, la matriz Z debe ser de la forma $Z = X + iY$, donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2 & -x_1 & -x_3 \\ {}^t x_3 & -{}^t x_3 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_1 & y_3 \\ {}^t y_3 & {}^t y_3 & y_6 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} {}^t x_1 &= x_1, \\ {}^t x_2 &= -x_2, \\ {}^t y_1 &= y_1, \end{aligned}$$

$${}^t y_2 = y_2,$$

son matrices de tamaño $\gamma \times \gamma$, y

${}^t y_6 = y_6$ es una matriz tamaño $(g - 2\gamma) \times (g - 2\gamma)$.

Caso 4: Supongamos que $\tau : S \rightarrow S$ actúa con puntos fijos y que estos no dividen S . En este caso, si k denota la cantidad de componentes conexas de puntos fijos de τ , entonces $g = 2\gamma + k + l$, para cierto $l \geq 2$. Entonces es posible escoger la base simpléctica de manera valga

- (a) $\tau(\alpha_t) = \alpha_{\gamma+t}$, para $t = 1, \dots, \gamma$
- (b) $\tau(\beta_t) = -\beta_{\gamma+t}$, para $t = 1, \dots, \gamma$
- (c) $\tau(\alpha_{2\gamma+u}) = \alpha_{2\gamma+u}$, para $u = 1, \dots, g - 2\gamma$
- (d) $\tau(\beta_{2\gamma+u}) = -\beta_{2\gamma+u}$, para $u = 1, \dots, g - 2\gamma$

En tal base, tenemos que

$$\widehat{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_2 \end{pmatrix},$$

donde I es la matriz identidad de tamaño $\gamma \times \gamma$ y la matriz I_2 es la matriz de tamaño $(g - 2\gamma) \times (g - 2\gamma)$. Así, la matriz Z debe ser de la forma $Z = X + iY$, donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2 & -x_1 & -x_3 \\ {}^t x_3 & -{}^t x_3 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_1 & y_3 \\ {}^t y_3 & {}^t y_3 & y_6 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} {}^t x_1 &= x_1, \\ {}^t x_2 &= -x_2, \\ {}^t y_1 &= y_1, \\ {}^t y_2 &= y_2, \end{aligned}$$

son matrices de tamaño $\gamma \times \gamma$, y

${}^t y_6 = y_6$ es matriz tamaño $(g - 2\gamma) \times (g - 2\gamma)$.

7.5. Cubrimiento Homológico de Superficies de Klein

Dado un grupo Kleiniano planar G y una colección invariante Δ de componentes de $\Omega(G)$, uno puede construir el espacio cociente Δ/G formada por las clases de equivalencia de las órbitas por G de los puntos de Δ . Si G actúa sin puntos fijos, es decir, para todo $p \in \Delta$ se tiene que $G_p = \{I\}$, entonces Δ/G es una superficie de Klein. Si además G sólo contiene transformaciones de Möbius, entonces esta es una superficie de Riemann. En el caso que G actúe con puntos fijos, entonces obtendremos superficies reales con posible borde tal que fuera de la proyección de los puntos fijos de elementos no triviales de G es una superficie de Klein. Estas són llamadas *orbifolds de Klein*.

Tomemos una superficie de Klein S , digamos $S = \Delta/G$ donde G es algún grupo Kleiniano planar actuando si puntos fijos y Δ es alguna componente invariante de $\Omega(G)$ (es decir, un grupo uniformizante). Consideremos el subgrupo $[G, G]$ de G generado por los conmutadores de G . Como $[G, G]$ es un subgrupo normal de G , entonces $\Omega([G, G]) = \Omega(G)$ y en particular podemos considerar la superficie de Klein $S^{ab} = \Delta/[G, G]$. Como $[G, G]$ consiste sólo de transformaciones de Möbius, S^{ab} es una superficie de Riemann. Diremos que S^{ab} es el *cubrimiento homológico* asociado a G de S .

Ejemplo 7.3. Si escogemos S una superficie de Riemann de género $g \geq 2$, entonces podemos escoger G como un grupo Fuchsiano dejando invariante el círculo unitario y Δ el disco abierto unitario. En este caso, $G/[G, G]$ es isomorfo al grupo de homología sobre \mathbb{Z} de S , es decir, $\oplus^{2g}\mathbb{Z}$. El cubrimiento homológico S^{ab} corresponde a mirar una incrustación holomorfa

$$i_q : S \rightarrow J(S) : p \rightarrow \left[\int_q^p \right],$$

donde $q \in S$, y levantar $i_q(S)$ al cobertor universal de la variedad jacobiana $J(S)$ de S , es decir, al dual de las diferenciales holomorfas de S .

El teorema de Torelli dice que $J(S)$ determina, modulo equivalencia holomorfo la superficie S . Un resultado relacionado probado por B. Maskit [**Maskit2**] es el siguiente:

Teorema 7.1. *Sea G un grupo Fuchsiano de la primera clase, sin torsión. Entonces G está únicamente determinado por $[G, G]$.*

En el caso más general, se ha probado en una serie de trabajos (por ejemplo, [**Hidalgo1**] [**Hidalgo2**]) que el anterior es válido para grupos Kleinianos planares más generales, por ejemplo:

Teorema 7.2. *Sea G un grupo uniformizante, sin torsión, con un número infinito de puntos límites, entonces G está únicamente determinado por $[G, G]$.*

Para demostrar este resultado, necesitaremos algunos preliminares. Sea S una superficie de Riemann de género g con k puntos removidos. Decimos que S es una superficie de Riemann *analíticamente finita* de *signatura* (g, k) . Denotemos por \bar{S} la superficie de Riemann compacta obtenida de S a colocar de vuelta los puntos removidos. Sea $H(S)$ el espacio vectorial complejo generado por las 1-formas holomorfas en \bar{S} y las 1-formas holomorfas en S con a lo más polos simples en los puntos removidos. Entonces tenemos el siguiente resultado [**Farkas-Kra**].

Lema 7.3. *La dimensión de $H(S)$ es dada por*

$$\dim_{\mathbb{C}} H(S) = \begin{cases} 2g, & \text{si } k = 0 \\ 2g + k - 1, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La función bilineal

$$(w, \alpha) \in H(S) \times H_1(S, \mathbb{C}) \rightarrow \int_{\alpha} w \in \mathbb{C}$$

define una dualidad entre $H(S)$ y $H_1(S, \mathbb{C})$.

Sea (G, Δ) un grupo uniformizante finitamente generado sin torsión y non-elemental. Denotemos por K su subgrupo generado por sus conmutadores. Asuma que tenemos un subgrupo de índice finito $I < G$ en G , conteniendo K . En este caso, tenemos una sucesión finita de cubrimientos holomorfos

$$\begin{aligned} r : \Delta &\rightarrow \Delta/K; \\ t : \Delta/K &\rightarrow \Delta/I; \\ p : \Delta/I &\rightarrow \Delta/G. \end{aligned}$$

También tenemos los respectivos cubrimientos a nivel de la variedades 3-dimensionales (con borde):

$$\begin{aligned} R : \widehat{\Delta} &\rightarrow \widehat{\Delta}/K; \\ T : \widehat{\Delta}/K &\rightarrow \widehat{\Delta}/I; \\ P : \widehat{\Delta}/I &\rightarrow \widehat{\Delta}/G, \end{aligned}$$

donde $\widehat{\Delta} = \Delta \cup \mathbb{H}^3$.

Consideremos el homomorfismo inducido a nivel del primer grupo de homología con coeficientes complejos:

$$H_1(P) : H_1(\widehat{\Delta}/I, \mathbb{C}) \rightarrow H_1(\widehat{\Delta}/G, \mathbb{C}).$$

Como el índice de I en G es finito, el cubrimiento $P : \widehat{\Delta}/I \rightarrow \widehat{\Delta}/G$ tiene grado finito y, en particular, $H_1(P)$ es un homomorfismo sobreyectivo. Más aún, sabemos que su núcleo está generado por aquellas curvas cerradas en $\widehat{\Delta}/I$ que se levantan en curvas cerradas en $\widehat{\Delta}/K$. Tenemos las siguientes inclusiones:

$$\begin{aligned} i_{\Delta} : \Delta &\hookrightarrow \widehat{\Delta}; \\ i_K : \Delta/K &\hookrightarrow \widehat{\Delta}/K; \\ i_I : \Delta/I &\hookrightarrow \widehat{\Delta}/I; \\ i_G : \Delta/G &\hookrightarrow \widehat{\Delta}/G. \end{aligned}$$

Los homomorfismos inducidos al nivel de homología con coeficientes complejos son sobreyectivos. Denotemos sus respectivos núcleos por $N_{\Delta} = H_1(\Delta, \mathbb{C})$, $N_K = \ker H_1(i_K) < H_1(\Delta/K, \mathbb{C})$, $N_I = \ker H_1(i_I) < H_1(\Delta/I, \mathbb{C})$ and $N_G = \ker H_1(i_G) < H_1(\Delta/G, \mathbb{C})$. We have that $H_1(r)(N_{\Delta}) < N_K$, $H_1(t)(N_K) < N_I$, $H_1(p)(N_I) < N_G$. Consideremos el homomorfismo inducido en el cociente $H_1(p) : H_1(\Delta/I, \mathbb{C})/N_I \rightarrow H_1(\Delta/G, \mathbb{C})/N_G$. Tenemos por lo anterior que el núcleo de homomorfismo sobreyectivo inducido está generado por aquellas curvas cerradas en Δ/I que se levantan en curvas cerradas en Δ/K .

Denotemos por N_I^t (respectivamente, N_G^t) el subespacio de $H(\Delta/I)$ (respectivamente, $H(\Delta/G)$) ortogonal a N_I (respectivamente, N_G). La función $p^* : N_G^t \rightarrow N_I^t$, definida por el pull-back de 1-formas, es dual al monomorfismo sobreyectivo anterior y, en particular, este es inyectivo. La imagen $P^*(N_G^t)$ corresponde a aquellas 1-formas en N_I^t las cuales son puntos fijos para el pull-back de cada transformación en G/I (un grupo abeliano). Lo siguiente no es difícil de verificar.

Lema 7.4. *La dimensión de N_G^t es la misma dimensión del espacio cociente $H_1(\widehat{\Delta}/G, \mathbb{C})$, es decir, igual a $\dim_{\mathbb{C}} H(\Delta/G) - l$, donde l denota el número máximo de curvas cerradas simples homológicamente independientes en Δ/G que se levantan en curvas cerradas en Δ . Similarmente para la dimensión de N_I^t .*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Consideremos dos grupos uniformizantes no-elementales, finitamente generados y sin torsión (G_1, Δ_1) y (G_2, Δ_2) tales que $[G_1, G_1] = [G_2, G_2] = K$. Queremos probar que $G_1 = G_2$. Sean $I = G_1 \cap G_2$ y $J = \langle G_1, G_2 \rangle$. Ya que K es non-elemental y normal en ambos G_1 y G_2 , tenemos que la región de discontinuidad de los tres es el mismo (ver proposición 6.38). Denotemos a tal región de discontinuidad por Ω . Similarmente, ya que J es un subgrupo del normalizador de K , tenemos necesariamente que J es un grupo Kleiniano planar con Ω como región de discontinuidad. El teorema de finitud de Ahlfors asegura que Ω/G_1 y Ω/G_2 son cada uno una unión finita de superficies de Riemann de área hiperbólica finita. Se sigue que el cubrimiento (posiblemente ramificado) $\Omega/G_i \rightarrow \Omega/J$ tiene grado finito, esto es, ambos G_1 y G_2 tienen índice finito en J y, en particular, tenemos que I tiene índice finito en G_1 , G_2 y J . Se sigue de la proposición 6.38, que I tiene a Ω como región de discontinuidad.

Lema 7.5. *Existe una componente invariante común Δ para G_1 y G_2 .*

DEMOSTRACIÓN. si $\Delta_1 = \Delta_2$, entonces estamos listos y $\Delta = \Delta_1$. Supongamos que $\Delta_1 \neq \Delta_2$. En este caso, I deja invariante ambas componentes Δ_1 y Δ_2 . Como I tiene índice finito en G_i , tenemos que I es finitamente generado. Se sigue de [Maskit4] que I es entonces un grupo casifuchsiano (es

decir, su conjunto límite es una curva de Jordan) y, como consecuencia, $\Omega = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Así, Δ_1 y Δ_2 son invariantes por ambos G_1 y G_2 . En particular, podemos tomar $\Delta = \Delta_1$. \square

Usemos la siguiente notación: $\Delta/I = R$, $\Delta/G_1 = S_1$, $\Delta/G_2 = S_2$, $\Delta/J = X$. Denotemos por $t : \Delta \rightarrow \Delta/K$, $r : \Delta/K \rightarrow R$ y $p_i : R \rightarrow S_i$, $i = 1, 2$, los cubrimientos holomorfos naturales inducidos por los grupos K , I/K y G_i/I , respectivamente. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 & \Delta & \\
 & \downarrow t & \\
 & \Delta/K & \\
 & \downarrow r & \\
 & R & \\
 p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\
 S_1 & & S_2 \\
 q_1 \searrow & & \swarrow q_2 \\
 & X &
 \end{array}$$

Tenemos que los homomorfismos sobreyectivos inducidos $H_1(p_j) : H_1(R, \mathbb{C})/N_I \rightarrow H_1(S_j, \mathbb{C})/N_{G_j}$, for $j = 1, 2$, tienen el mismo núcleo (el espacio generado por aquellas curvas cerradas en R que se levantan en curvas cerradas en Δ/K). De aquí obtenemos que las 1-formas en N_I^{\perp} invariantes por G_1/I son las mismas que son invariantes por G_2/I y, en particular, las mismas que son invariantes por el grupo generado por G_1/I y G_2/I . Esto es, las dimensiones de esos tres espacios es la misma. Ahora, lema 7.4 dice que la dimensión del espacio de formas invariantes por G_j (respectivamente, el grupo generado por G_1/I y G_2/I) es igual a $\dim H(S_j) - l_j$ (respectivamente, $\dim H(X) - l$), donde l_j (respectivamente, l) denota el número maximal de curvas cerradas simples homológicamente independientes dos a dos disjuntas en S_j (respectivamente, en X) que se levantan en curvas cerradas en Δ (módulo potencias finitas en el caso de X). En particular, tenemos las igualdades

$$(*) \quad \dim_{\mathbb{C}} H(S_j) - l_j = \dim_{\mathbb{C}} H(X) - l.$$

Denotemos por g_j (respectivamente, g) el género de S_j (respectivamente, X) y por k_j (respectivamente, k) el número de pinchaduras de S_j (respectivamente, X). Tenemos necesariamente que

- (1) $g \leq g_i$
- (2) $k \leq k_i$
- (3) $g - l \leq g_i - l_i$

Desigualdades (1) y (2) son claras. Para ver (3), uno debe considerar un conjunto maximal Σ de curvas cerradas simples, dos a dos disjuntas y homológicamente independientes en X , cada una de ellas levantándose en curvas cerradas en Δ . Sea $\tilde{\Sigma}_i$ el levantamiento de Σ a S_i . Tenemos que $\tilde{\Sigma}_i$ es una colección de curvas cerradas simples, dos a dos disjuntas, que se levantan en curvas cerradas en Δ . Procedamos a cortar ambas X y S_i a lo largo de esas curvas cerradas. Ahora pegamos discos cerrados a lo largo de los nuevos bordes. Aún tenemos un cubrimiento (quizás ramificado) sin nuevas ramificaciones (consecuencia del levantamiento de las curvas cerradas de Σ). El género de la nueva superficie obtenida en esta manera de X es $g - l$. La suma de los géneros de las nuevas superficies obtenidas de S_i es a lo más $g_i - l_i$. Ahora, desigualdad (3) es consecuencia de comparación de áreas. Las desigualdades (1), (2) y (3) juntas con la igualdad (*) da las igualdades

$$g = g_i, \quad k = k_i \quad \text{and} \quad l = l_i.$$

Obtenemos en esta manera que el índice de G_j en J es 1 y, en consecuencia, $G_1 = G_2$. \square

Grupos de Schottky y Variedades Abelianas

8.1. Grupos de Schottky

Una buena referencia para esta sección es [Chuckrow], [Maskit1]. Consideremos una colección de $2g$ (donde $g \geq 1$) curvas simples cerradas en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, digamos $C_1, \dots, C_g, C'_1, \dots, C'_g$, de manera que ellas acotan un dominio \mathcal{D} de conectividad $2g$. Supongamos que existen transformaciones de Möbius A_1, \dots, A_g tales que para cada $k \in \{1, \dots, g\}$ vale que:

- (1) $A_k(C_k) = C'_k$;
- (2) $A_k(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D} = \emptyset$,

entonces el grupo G de transformaciones de Möbius generado por A_1, \dots, A_g es llamado un *grupo de Schottky* de género g . Las curvas C_1, \dots, C'_g son llamadas un *sistema fundamental de curvas* asociadas a los *generadores de Schottky* A_1, \dots, A_g .

Ejercicios.

- 1.- Verificar que para todo $g \geq 1$ existen un número infinito de grupos de Schottky de género g . [Ind. Utilice círculos]
- 2.- Verifique que cada uno de los generadores A_1, \dots, A_g es necesariamente loxodrómico. [Ind. Verifique que A_k tiene dos puntos fijos y que no puede ser una rotación]
- 3.- Verifique que un grupo de Schottky de género g es un grupo libre de rango g . [Ind. Tome un punto p dentro de la región \mathcal{D} y mire la órbita de p]. Deducir que todo grupo de Schottky no contiene transformaciones elípticas.
- 4.- Verifique que todo grupo de Schottky de género g es un grupo Kleiniano planar, es decir, actúa de marea discontinua en algún punto de la esfera de Riemann. [Ind. Vea que cada punto en la clausura de \mathcal{D} es un punto de discontinuidad de G]
- 5.- Sea $\Omega(G)$ la region de discontinuidad de un grupo de Schottky de género g . Verifique que $\Omega(G)$ es conexo. [Ind. Vea que todo punto en la órbita por G de la clausura de \mathcal{D} es punto de discontinuidad y que la órbita de este conjunto es conexo. Luego vea que todo punto en el borde de la órbita no puede ser un punto de discontinuidad]. Concluir de esto que el conjunto límite de un grupo de Schottky es totalmente disconexo.
- 5.- Si G es un grupo de Schottky de género g , entonces $\Omega(G)/G$ es una superficie de Riemann de género g . [Ind. Ver que para todo punto en $\Omega(G)$ existe un punto de su órbita por G en la clausura de \mathcal{D} . Más aún, dos puntos diferentes en \mathcal{D} no pueden ser equivalentes por G y cada punto en el borde C_k tiene exactamente otro representante en el borde C'_k y no en otro borde ni en \mathcal{D} . Deducir que $\Omega(G)/G$ es homeomorfo a una superficie orientable cerrada de género g . Usar la proyección natural $\pi : \Omega(G) \rightarrow \Omega(G)/G = S$ para dotar a S de una estructura de superficie de Riemann]

Sea G un grupo de Schottky de género g . El ejercicio anterior nos dice que $\Omega(G)/G$ es una superficie de Riemann de género g . El siguiente resultado de Koebe [Koebe] dice que el recíproco es verdad.

Teorema 8.1 (Teorema de Retrosección de Koebe). *Sea S una superficie de Riemann de género $g \geq 1$. Entonces existe un grupo de Schottky G de género g tal que $\Omega(G)/G$ es holomórficamente equivalente a S*

Muchas demostraciones existen de este teorema. Uno de ellas utiliza las herramientas de funciones casiholomorfas [Bers]. La idea es partir con un grupo de Schottky de género g , digamos K y luego considerar conjugadas de K por homeomorfismos de la esfera de Riemann de manera que sigamos obteniendo grupos de Möbius. Entonces estas conjugadas son otra vez grupos de Schottky de género g . La manera de escoger el homeomorfismo adecuado es tomar un difeomorfismo $f : \Omega(K)/K \rightarrow S$ y considerar su diferencial de Beltrami dada por $\mu = \partial_{\bar{z}}f/\partial_z f$ en coordenadas locales. Luego levantamos la diferencial μ a todo $\Omega(K)$ de manera que sea invariante por la acción de K . La teoría de aplicaciones casiholomorfas asegura la existencia de un homeomorfismo $F : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ cuyo diferencial de Beltrami es esta μ levantada a $\Omega(K)$. Luego FKF^{-1} es el grupo de Schottky buscado. La demostración de Koebe es constructiva. Uno considera en la superficie S una colección $\alpha_1, \dots, \alpha_g$, de curvas cerradas simples homotópicamente independientes (es decir, $S - \{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$ es una esfera con $2g$ hoyos. Vea que esta es parecida a la región \mathcal{D} en la definición de grupo de Schottky). Ahora uno procede a pegar copias de $S - \{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$ (clausura) de manera de obtener una región planar Σ (toda curva simple cerrada en ella divide). Topológicamente hemos construido un grupo de Schottky. Ahora uno tiene un cubrimiento Galois topológico de S por esta superficie planar Σ con grupo de cubrimiento un grupo libre de rango g . Ahora levantamos la estructura de superficie de Riemann de S para dotar a Σ de una estructura de superficie de Riemann planar de manera que el grupo libre anterior es un grupo de automorfismos holomorfos de ella. Usando el teorema de planaridad [Maskit1] uno obtiene el grupo de Schottky deseado. En el lenguaje moderno, la construcción hecha es considerar el grupo fundamental de S , $\pi_1(S, p) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g : \prod_{j=1}^g [\alpha_j, \beta_j] = 1 \rangle$, donde $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, y escoger el subgrupo normal mas pequeño que contenga las palabras β_1, \dots, β_g , digamos F . Entonces F uniformiza la región de discontinuidad de un grupo de Schottky de género g , siendo este grupo de Schottky el grupo cociente $\pi_1(S, p)/F$, que uniformiza la superficie S .

Ejemplo 8.1. Consideremos una transformación loxodrómica $T(z) = \lambda z$, donde $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $|\lambda| \neq 1$. Entonces el grupo cíclico G_λ generado por T es un grupo de Schottky de género 1. Podemos escribir $\lambda = e^{i\tau}$ para algún $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$. Más aún, G_λ y G_{λ^*} uniformizan toros equivalentes sí y sólo sí existe una matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$$

tal que $\lambda = e^{i\tau}$ y $\lambda^* = e^{i\tau^*}$ para ciertos $\tau, \tau^* \in \mathbb{H}$ con $\tau^* = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$.

8.2. Grupos de Schottky y Automorfismos

Supongamos ahora que tenemos una superficie de Riemann S de género $g \geq 2$ y un grupo H de automorfismos de S (holomorfos o antiholomorfos). Diremos que H es un grupo de tipo Schottky si es posible encontrar un grupo de Schottky G y un cubrimiento holomorfo $P : \Omega(G) \rightarrow S$, con G como grupo de cubrimiento, de manera que todo elemento de H pueda levantarse por P , es decir, para todo $h \in H$ exista un automorfismo holomorfo (si h es holomorfo) o antiholomorfo (si h es antiholomorfo) de $\Omega(G)$, digamos $k_h : \Omega(G) \rightarrow \Omega(G)$ tal que $Ph_k = hP$. Como todo automorfismo de la región de discontinuidad de un grupo de Schottky es necesariamente una transformación de Möbius (si holomorfo) o la composición de una transformación de Möbius con la conjugación (si antiholomorfo), k_h es de uno de esos tipos.

Es importante notar que no todo grupo H es de tipo Schottky. Por ejemplo, es fácil ver que si S/H es una esfera con tres valores de ramificación y toda transformación de H es holomorfo, entonces H no es

de tipo Schottky. Una manera de ver esto es la siguiente. Si H fuese tipo Schottky, entonces al levantar H obtenemos un grupo K de transformaciones de Möbius conteniendo a un grupo de Schottky G de índice finito (y también normal). El grupo K tiene la misma región de discontinuidad que G , luego conexa. Como $\Omega(G)/K$ es una esfera con tres puntos especiales, K es un grupo uniformizante, debe ocurrir por rigidez de los grupos triangulares que K es Fuchsiano de primera clase, es decir su conjunto límite es un círculo. Una contradicción al hecho que el conjunto límite de un grupo de Schottky es totalmente disconexo.

Es importante notar que todo grupo de automorfismos holomorfos isomorfo a un grupo dihedral siempre es de tipo Schottky [Hidalgo3]. Para ver más sobre este problema de automorfismos tipo Schottky mirar por ejemplo en [Costa-Hidalgo], [Hidalgo3], [Hidalgo4], [Hidalgo4], [Hidalgo5], [Hidalgo6]. En el caso que S tiene reflexiones, tenemos el siguiente resultado de B. Maskit [Maskit3]

Teorema 8.2. *Sea S una superficie de Riemann admitiendo una reflexión $\tau : S \rightarrow S$. Entonces existe un grupo de Schottky G que deja un círculo \mathcal{C} invariante tal que $S = \Omega(G)/G$ y la reflexión τ es inducida por la reflexión en \mathcal{C} .*

Como consecuencia de esto tenemos la siguiente:

Corolario 8.3. *Sea S una superficie de Riemann admitiendo una reflexión $\tau : S \rightarrow S$. Entonces $K(S, \tau)$ es tipo Schottky.*

DEMOSTRACIÓN. Sea S una superficie de Riemann de género g junto a una reflexión $\tau : S \rightarrow S$. Sea G un grupo de Schottky que deja invariante el círculo S^1 y tal que existe un cubrimiento holomorfo $P : \Omega(G) \rightarrow S$ con G como grupo cobertor determinado por el teorema anterior. Denotemos por Δ uno de los dos discos acotados por S^1 y por σ la reflexión en S^1 .

(1) Supongamos que el conjunto de puntos fijos de τ divide S en dos superficies, digamos S_1 y S_2 . En este caso, G es un grupo Fuchsiano. Supongamos que $P(\Delta) = S_1$. Sea K el subgrupo de índice dos en $K(S, \tau)$ que deja invariante s_1 . Tenemos entonces que $K(S, \tau)$ está generado por K y τ . Como $P : \Delta \rightarrow S_1$ es cubrimiento universal, entonces podemos levantar el grupo K . Tal levantamiento es un grupo Fuchsiano \widehat{K} . Ahora, es claro que \widehat{k} y σ generan un grupo que resulta ser el levantamiento de $K(S, \tau)$ por P .

(2) Supongamos ahora que el conjunto de puntos fijos de τ no divide S . Denotemos por S^* a S menos los puntos fijos de τ . Sea \widehat{G} el grupo generado por G y σ . Ya que \mathcal{C} es invariante por G , tenemos que el grupo F de orden dos generado por σ es normal en \widehat{G} . Consideremos el cubrimiento ramificado $Q : \Omega(G) \rightarrow \overline{D}$ inducido por la acción de F , donde D es el disco unitario. El cociente $H = \widehat{G}/F$ actúa como grupo de automorfismos holomorfos del disco unitario Δ . Tenemos que el cubrimiento holomorfo $Q^* : \Delta \rightarrow (S^*/\tau)$, inducido por H , es cubrimiento universal. En particular, podemos levantar $K(S, \tau)/\tau$ a D por este cubrimiento universal. Tal levantamiento es dado por transformaciones de Möbius y luego extienden de manera natural al círculo borde. Ahora es fácil levantar este grupo de automorfismos de \overline{D} por el cubrimiento ramificado Q^* para obtener de esta manera el levantamiento de $K(S, \tau)$ como era deseado. \square

Ahora, suponiendo que H es un grupo de automorfismos de tipo Schottky y que $G, P : \Omega(G) \rightarrow S$ son un grupo de Schottky como se desea y P el cubrimiento correspondiente, podemos proceder como sigue: Fijemos un sistema fundamental de curvas $C_1, \dots, C_g, C'_1, \dots, C'_g$ asociada a los generadores de Schottky A_1, \dots, A_g para G . Orientemos las curvas C_1, \dots, C_g digamos en el sentido opuesto a las manecillas de un reloj (no digital pero a cuerda). Damos las orientaciones inducidas por la acción de los generadores a las curvas C'_1, \dots, C'_g . Consideremos arcos simples orientados dos a dos disjuntos

M_1, \dots, M_g , de manera que M_j es disjunta de C_k y C'_k si $j \neq k$, M_j interseca C_j en su punto final e interseca C'_j en su punto inicial, siendo este punto la imagen del punto final por A_j .

Las curvas orientadas C_1, \dots, C_g se proyectan sobre S en curvas simples orientadas cerradas $\alpha_1, \dots, \alpha_g$, respectivamente. Idénticamente, los arcos orientados M_1, \dots, M_g se proyectan en curvas orientadas simples y cerradas β_1, \dots, β_g , respectivamente. No es difícil observar que $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ define una *base simpléctica* para la homología de S .

Usando esta base simpléctica, uno tiene una representación fiel del grupo H en el *grupo extendido simpléctico*

$$\rho^* : H \rightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}}(2g, \mathbb{Z}),$$

definida por

$$\rho^*(h) = \begin{pmatrix} A_h & 0 \\ B_h & {}^t A_h^{-1} \end{pmatrix}, \text{ si } h \text{ es holomorfo y}$$

$$\rho^*(h) = \begin{pmatrix} A_h & 0 \\ B_h & -{}^t A_h^{-1} \end{pmatrix}, \text{ si } h \text{ es antiholomorfo}$$

Observemos que $\eta : H \rightarrow \mathrm{GL}(g, \mathbb{Z})$ definida por $\eta(h) = A_h$ es también una representación fiel de H . Si cambiamos la base

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}$$

por la nueva base simpléctica

$$\{\beta_1, \dots, \beta_g, -\alpha_1, \dots, -\alpha_g\},$$

entonces tenemos la representación simpléctica

$$\rho : H \rightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}}(2g, \mathbb{Z}),$$

definida por

$$\rho(h) = \begin{pmatrix} {}^t A_h^{-1} & -B_h \\ 0 & A_h \end{pmatrix}, \text{ si } h \text{ es holomorfo y}$$

$$\rho(h) = \begin{pmatrix} -{}^t A_h^{-1} & -B_h \\ 0 & A_h \end{pmatrix}, \text{ si } h \text{ es antiholomorfo}$$

Observemos que si queremos calcular un punto fijo $Z \in \mathcal{H}_g$ por una matriz simpléctica (extendida) de la forma

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(2g, \mathbb{Z}),$$

entonces sólo tenemos que resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} B + ZD = AZ & \text{caso que } M \in \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \\ B + \bar{Z}D = AZ & \text{caso que } M \notin \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Ejercicio 8.1.

(1) Se tiene que $Z \in \mathcal{H}_g$ es punto fijo de

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(2g, \mathbb{Z}),$$

sí y sólo si $-Z^{-1} \in \mathcal{H}_g$ es punto fijo de

$$N = \begin{pmatrix} D & 0 \\ -B & A \end{pmatrix}.$$

(2) Se tienen que $Z \in \mathcal{H}_g$ es punto fijo de

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \widetilde{\text{Sp}}(2g, \mathbb{Z}),$$

sí y sólo si $-Z^{-1} \in \mathcal{H}_g$ es punto fijo de

$$N = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ 0 & {}^tD \end{pmatrix}.$$

[Ind: Para verificar (2) basta observar que Z es punto fijo de M sí y sólo si es punto fijo de M^{-1} . Ahora observe que

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ 0 & {}^tA \end{pmatrix},$$

y utilice parte (1) con M^{-1} .]

Ahora, el grupo H es el cociente K/G , donde K es el levantamiento de H . Este grupo K , como se mencionó arriba, contiene al grupo de Schottky G como un subgrupo normal de índice finito. En particular, cada elemento $k \in K$ induce un par de isomorfismos $\theta(k) : G \rightarrow G$ y $\theta(k)^{ab} : G/[G, G] \rightarrow G/[G, G]$, definidos por conjugación el primero y por abelianización del primero en el segundo caso. Es fácil ver que si $k \in G$, entonces $\theta(k)^{ab}$ es la identidad. Luego, para cada $h \in H$ tenemos en forma natural un isomorfismo $\Theta(h) : G/[G, G] \rightarrow G/[G, G]$ definido como $\Theta(h) = \theta(k_h)^{ab}$, donde $k_h \in K$ es cualquier levantamiento de h . Usando la base A_1, \dots, A_g del grupo de Schottky G , tenemos una representación matricial de $\Theta(h)$ (escrita también en filas). De la definición de la base simpléctica uno deduce fácilmente que

- (1) $\Theta(h) = {}^tA_h^{-1}$ si h es holomorfo;
- (2) $\Theta(h) = -{}^tA_h^{-1}$ si h es antiholomorfo.

Para ver lo anterior hay que darse cuenta que la acción del grupo H visto como el cociente de K es en realidad la acción a nivel de los arcos M_1, \dots, M_g y, luego, la acción a nivel de las curvas β_1, \dots, β_g .

Ahora que tenemos calculada una representación fiel $\rho : H \rightarrow \widetilde{\text{Sp}}(2g, \mathbb{Z})$, podemos calcular sus puntos fijos en el espacio de Siegel obteniendo de esta manera variedades abelianas principalmente polarizadas con grupo de automorfismos (holomorfo/antiholomorfo) $\rho(H)$.

Ejemplo 8.2. Consideremos un círculo C_1 en el plano complejo que no separe 0 de ∞ y tal que los círculos $C_1, C_2 = T(C_1), C'_1 = T^2(C_1), C'_2 = T^3(C_1)$ son dos a dos disjuntos para $T(z) = iz$. Orientemos C_1 y C_2 con la orientación opuesta a las manecillas de un reloj. Los círculos C'_1 y C'_2 son orientados según las manecillas de un reloj. Sea A_1 la composición de la reflexión en C_1 seguida por la reflexión en el eje imaginario. Tomamos $A_2 = TA_1T^{-1}$. Entonces el grupo G generado por A_1 y A_2 es un grupo de Schottky de género 2.

Ya que $TA_1T^{-1} = A_2$ y $TA_2T^{-1} = A_1^{-1}$, tenemos que

$$\Theta(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, la superficie de Riemann $S = \Omega(G)/G$ admite el grupo de automorfismos $H = \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ inducido por K , el grupo generado por G y T . Se tiene que G es un subgrupo normal de índice 4 en K .

Escogiendo M_1 como el arco real que conecta C_1 con C'_1 (que pasa por 0, y M_2 el arco contenido en el eje imaginario (pasando por ∞) que conecta C_2 con C'_2 , tenemos en homología que en la base

$$\{\beta_1, \beta_2, -\alpha_1, -\alpha_2\}$$

la representación de t es dada por:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

8.3. Grupos de Schottky con Círculos Invariantes

Consideremos un grupo de Schottky G de género $g \geq 2$ que deja invariante algún círculo C . En este caso, el conjunto límite de G está contenido en C . Si denotamos por σ la reflexión en C , entonces la superficie de Riemann $S = \Omega(G)/G$ admite un automorfismo antiholomorfo de orden dos $\tau : S \rightarrow S$ actuando con puntos fijos.

Podemos considerar el grupo $K(S, \tau)$ que consiste de aquellos automorfismos holomorfos y antiholomorfos que conmutan con τ . En particular, $\tau \in K(S, \tau)$ y $\langle \tau \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es subgrupo normal de $K(S, \tau)$. La superficie cociente $R = S/\tau$ es una superficie de Klein compacta con borde. El grupo $K(S, \tau)/\tau$ es el grupo de automorfismos de Klein de R . Por resultados de C.L. May [May] tenemos que $|K(S, \tau)| \leq 24(g-1)$. Uno puede usar este grupo para calcular puntos fijos en el espacio de Siegel y así obtener variedades abelianas principalmente polarizadas con automorfismos y que admiten una estructura real que conmuta con tal grupo.

Por otro lado, Burnside [Burnside] ha observado que la siguiente:

Teorema 8.4. *Sea G un grupo de Schottky que deja invariante un círculo en la esfera de Riemann y tal que $\infty \in \Omega(G)$. Entonces la serie*

$$\sum_{\gamma \in G} \gamma'(z)$$

es uniformemente convergente en compactos de $\Omega(G)$.

DEMOSTRACIÓN. Primero supongamos que G deja invariante una línea L . Si $K \subset \Omega(G)$ es algún compacto, entonces exceptuando un número finito de transformaciones en G existe una constante positiva $A > 0$ tal que

$$\sum_{\gamma \in G} |\gamma'(z)| \leq A \sum_{\gamma \in G} \frac{1}{|c|^2},$$

donde $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$. Elijamos un punto $q \in L$ y un número positivo $R > 1$ tal que $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - q| > R\} \cup \{\infty\}$ es precisamente invariante por la identidad en G . En este caso, tenemos que los conjuntos $\gamma(B)$ son discos ortogonales a L y, en particular,

$$\sum_{\gamma \in G, \gamma \neq I} \text{diam}(\gamma(B)) \leq 2R,$$

donde diam denota el diámetro Euclideo. Si usamos la desigualdad dada en C.7 de [Maskit1]

$$\text{diam}(\gamma(B)) \geq \frac{1}{|c|^2} \frac{1}{\text{dist}(g^{-1}(\infty), B)} \geq \frac{1}{|c|^2} \frac{1}{R},$$

for $\gamma \neq I$, entonces podemos obtener la convergencia de $\sum_{\gamma \in G} \frac{1}{|c|^2}$.

Ahora supongamos que G deja invariante un círculo C en el plano complejo. Escojamos un punto $q \in C \cap \Omega(G)$ (entonces $q \neq \infty$). Sean $T(z) = \frac{1}{z-q}$, $H = TGT^{-1}$ y $L = T(S)$. Entonces H es un grupo de Schottky que deja invariante la línea L y para el cual $\infty \in \Omega(H)$. En este caso tenemos

la convergencia para $\sum_{h \in H} h'(w)$ en subconjuntos compactos de $\Omega(H)$. Sea K un subconjunto compacto de $\Omega(G)$ tal que $q \notin K$. Entonces para $z \in K$ tenemos

$$\sum_{h \in H, h \neq I} |h'(T(z))| = \sum_{\gamma \in G, \gamma \neq I} |\gamma'(z)| \frac{1}{|\gamma(z) - q|^2 |T(z)|^2}.$$

El hecho que $q \notin K$ asegura que

$$\text{Inf}\left\{\frac{1}{|T(z)|^2}; z \in K\right\} = M > 0.$$

También, excepto por un número finito de elementos de G , digamos $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, tenemos que

$$\text{Inf}\left\{\frac{1}{|\gamma(z) - q|^2}; z \in K, \gamma \in G - \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}\right\} = N > 0.$$

Ahora, se sigue que

$$\sum_{\gamma \in G, \gamma \neq I} |\gamma'(z)| \frac{1}{|\gamma(z) - q|^2 |T(z)|^2} \geq NM \sum_{\gamma \in G, \gamma \neq I} |\gamma'(z)|,$$

obteniendo de esta forma la convergencia deseada. \square

El resultado de Burnside nos permite calcular explícitamente la matriz de Riemann de $S = \Omega(g)/G$ de la siguiente manera. Procedemos como en la sección anterior para obtener una base simpléctica para S , es decir, escoger las curvas $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ como proyecciones de las curvas (orientadas) C_1, \dots, C_g , y las curvas β_1, \dots, β_g como las proyecciones de los arcos M_1, \dots, M_g . En este caso

$$\hat{w}_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{g \in G} \frac{g'(z)}{g(z) - A_j^{-1}(\infty)} dz,$$

para $j = 1, \dots, g$, son los levantamientos a $\Omega(G)$ de las formas holomorfas duales a las curvas $\alpha_1, \dots, \alpha_g$. Supongamos que p_j es el punto inicial de M_j (entonces, $A_j^{-1}(p_j)$ es su punto final). En este caso la matriz de Riemann de S en esa base es dada por una matriz $Z = (z_{kj}) \in \mathcal{H}_g$, donde

$$y_{kj} = \text{Im}(z_{kj}) = \frac{1}{2\pi} \text{Log} \left(\prod_{\gamma \in G} \frac{|\gamma(p_k) - A_j^{-1}(\infty)|}{|\gamma(A_j^{-1}(p_k)) - A_j^{-1}(\infty)|} \right),$$

de donde obtenemos $Y = \text{Im}(Z)$.

La representación (extendida) simpléctica de la reflexión τ en esta base simpléctica es dada por la matriz

$$\begin{bmatrix} -I & 0 \\ B & I \end{bmatrix}.$$

Usando la base simpléctica

$$\{\beta_1, \dots, \beta_g, -\alpha_1, \dots, -\alpha_g\},$$

tenemos que la matriz de Riemann para S es dada por $W = -Z^{-1}$ y la representación simpléctica de τ es

$$\begin{bmatrix} I & -B \\ 0 & -I \end{bmatrix}.$$

Al ser W punto fijo de τ , debemos tener

$$\text{Re}(W) = \frac{-1}{2} B.$$

De todo lo anterior sabemos que

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(Z) &= Y; \\ \operatorname{Re}(-Z^{-1}) &= \frac{-1}{2}B. \end{cases}$$

Ya que $Z(-Z^{-1}) = -I$, obtenemos el siguiente sistema el cual permite obtener $\operatorname{Re}(Z)$:

$$\begin{cases} -Y\operatorname{Im}(Z^{-1}) + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(Z)B &= I \\ \operatorname{Re}(Z)\operatorname{Im}(Z^{-1}) + \frac{1}{2}YB &= 0. \end{cases}$$

Observación 8.1. Observemos que si tenemos $B = 0$, entonces la ecuación anterior asegura que $\operatorname{Re}(Z) = 0$. De esta manera

$$Z = iY.$$

Superficies de Riemann Maximal Simétricas

En este capítulo ejemplificaremos los resultados del capítulo anterior para cierto tipo de superficies de Riemann llamadas maximal simétricas.

9.1. Superficies Maximales Simétricas

Una superficie de Riemann S , de género $g \geq 2$, es llamada una *superficie maximal simétrica* si existe una reflexión $\tau : S \rightarrow S$, es decir, una involución antiholomorfo con puntos fijos, de manera que $|K(S, \tau)| = 24(g - 1)$. La reflexión τ será llamada una *reflexión maximal* de S . En este capítulo usaremos este tipo de superficies para usar las herramientas explicadas en la última sección del capítulo anterior.

La primera observación que debemos hacer notar es que $S/K(S, \tau)$ es un disco cerrado con cuatro valores de ramificación en su borde, de ordenes 2, 2, 2 y 3 [May]. Si denotamos por $K^+(S, \tau)$ el subgrupo de índice dos de $K(S, \tau)$ consistente de los automorfismos holomorfos de S que conmutan con τ , entonces $|K(S, \tau)| = 12(g - 1)$ y $S/K^+(S, \tau)$ es la esfera de Riemann con una reflexión η , inducida por τ , con exactamente cuatro valores de ramificación de ordenes 2, 2, 2 y 3, todos ellos ubicados en el círculo de puntos fijos de la reflexión η .

Segundo, la superficie de Klein $R = S/\tau$ es una superficie compacta de Klein con borde. Esta superficie puede ser orientable como no serlo. El grupo $K(S, \tau)/\tau$ corresponde al grupo total de automorfismos de R , un grupo de orden $12(g - 1)$.

Toda superficie de Riemann puede tener dos posibilidades: ser hiperelíptica, es decir, tener una involución holomorfo con exactamente $2(g + 1)$ puntos fijos. El siguiente resultado nos dice que superficies maximales simétricas no pueden ser hiperelípticas si el género es mayor que dos.

Teorema 9.1. *Una superficie maximal simétrica de género al menos tres no puede ser hiperelíptica.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que S es maximal simétrica hiperelíptica de género mayor o igual a tres con reflexión maximal $\tau : S \rightarrow S$. Denotemos por $j : S \rightarrow S$ la involución hiperelíptica. Como j es única, tenemos que $j \in K(S, \tau)$. Denotemos por $Q : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ el cubrimiento ramificado inducido por la acción de j . La reflexión τ desciende a una reflexión $\eta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ el cual conmuta con cada automorfismo en $N = K^+(S, \tau)/j$, un grupo de transformaciones de Möbius de orden $6(g - 1)$. Denotemos por \mathcal{C} el círculo de puntos fijos de la reflexión η . Luego el grupo N es Fuchsiano o posee un subgrupo N_0 de índice dos que es Fuchsiano. Como todo grupo Fuchsiano finito es cíclico, obtenemos que N posee un grupo cíclico Fuchsiano de orden $3(g - 1)$ y, en particular, el cociente $S/K(S, \tau)$ debería tener un valor de ramificación de orden $3(g - 1) > 5$, una contradicción. \square

Como el cociente $S/K(S, \tau)$ es un disco cerrado con cuatro valores de ramificación en su borde, cuyos ordenes son 2, 2, 2 y 3, primero buscaremos ciertos grupos Kleinianos planares que uniformizan todas estas.

9.2. Uniformizaciones de $S/K(S, \tau)$

Consideremos una superficie de Riemann maximal S con una reflexión maximal $\tau : S \rightarrow S$. Como ya habíamos observado, $S/K(S, \tau)$ es un disco cerrado con cuatro valores de ramificación en su borde cuyos ordenes son 2, 2, 2 y 3.

Por cada $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$, consideremos el grupo \widehat{K}_p generado por las siguientes reflexiones: $\sigma_1(z) = \bar{z}$, $\sigma_2(z) = e^{\frac{2\pi i}{3}} \bar{z}$, $\sigma_p(z) = \frac{(1+p^2)\bar{z}-2p}{2p\bar{z}-(1+p^2)}$ y $\sigma(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ (ver figura 9.1).

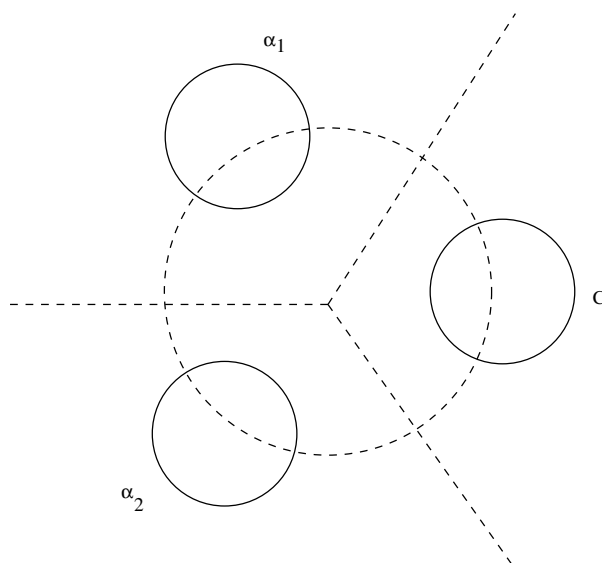


FIGURA 9.1. Dominio fundamental para K_p

Consideremos las siguientes transformaciones $W(z) = \sigma_2\sigma_1(z) = e^{\frac{2\pi i}{3}} z$, $T(z) = \sigma\sigma_1(z) = \frac{1}{z}$ y

$J(z) = \sigma_p\sigma_1(z) = \frac{(p + \frac{1}{p})z - 2}{2z - (p + \frac{1}{p})}$. Entonces el grupo \widehat{K}_p es también generado por las transformaciones

T , W , J y σ . Como consecuencia de los teoremas de combinación de Klein-Maskit [Maskit1], tenemos que

$$\widehat{K}_p = \langle T, W, J, \sigma : T^2 = W^3 = (WT)^2 = J^2 = (TJ)^2 = \sigma^2 = (\sigma T)^2 = \sigma W \sigma W^{-1} = (\sigma J)^2 = 1 \rangle.$$

El grupo Kleiniano planar \widehat{K}_p tiene un dominio de discontinuidad conexo Ω y un dominio fundamental determinado por la región acotada por los círculos unitario, los rayos de argumentos $\frac{\pi i}{3}$ y $-\frac{\pi i}{3}$, respectivamente, y el círculo C , ortogonal al círculo unitario, conteniendo los puntos p y $\frac{1}{p}$ (ver

figura 9.1). La superficie de Klein uniformizada por \widehat{K} es un disco cerrado con exactamente cuatro valores de ramificación en su borde, cuyos ordenes son 2, 2, 2 y 3.

Teorema 9.2. *Sea X una superficie de Klein la cual es topológicamente un disco cerrado con exactamente cuatro valores de ramificación sobre su borde, cuyos valores de ramificación son 2, 2, 2*

and 3. Entonces existe un valor de $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ tal que $\Omega(K_p)/K_p$ es dianalíticamente equivalente a X .

DEMOSTRACIÓN. Esto es consecuencia de la teoría de funciones casiholomorfas y el hecho que los puntos fijos de reflexiones son círculos Euclidianos. \square

El subgrupo de índice dos K_p de \widehat{K}_p consistiendo de la transformaciones holomorfas está generado por T, W y J . Una presentación para K_p es

$$K_p = \langle T, W, J : T^2 = W^3 = (WT)^2 = J^2 = (TJ)^2 = 1 \rangle,$$

es decir, isomorfo al producto libre amalgamado del grupo dihedral $D_3 = \langle T, W \rangle$ con el grupo de Klein $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2 = \langle T, J \rangle$ sobre el grupo cíclico de orden dos generado por T . La superficie de Riemann Ω/K_p es la esfera de Riemann con cuatro valores de ramificación de ordenes 2, 2, 2 and 3, todos ellos contenidos en el círculo de puntos fijos de la reflexión inducida por σ . Un dominio fundamental para K_p puede ser tomado como la unión del dominio fundamental para \widehat{K}_p con su trasladado por σ y los puntos del círculo unitario localizados entre $e^{\frac{\pi i}{3}}$ y $e^{-\frac{\pi i}{3}}$.

- Observación 9.1.** (1) En el caso frontera $p = 2 - \sqrt{3}$, \widehat{K}_p uniformiza un triángulo hiperbólico con un vértice al infinito, un vértice con ángulo $\frac{\pi}{3}$ y el otro con ángulo $\frac{\pi}{2}$. El grupo K_p uniformiza en este caso el plano complejo con dos valores de ramificación de ordenes 2 y 3, respectivamente.
- (2) Para $p = 1$, \widehat{K}_p es sólo generado por las reflexiones σ_1, σ_2 y σ , pero actuando en la esfera pinchada en tres puntos (los puntos de contacto de los círculos de puntos fijos). En este caso, el grupo \widehat{K}_p uniformiza el disco cerrado con tres valores de ramificación sobre su borde, cuyos ordenes son 2, 3 y ∞ , respectivamente.

9.3. Superficies Maximales Simétricas de Género 2

9.3.1. Acciones Topológicas. Tenemos exactamente dos posibles acciones topológicas de $K(S, \tau)$ para S maximal simétrica y τ una reflexión maximal de S , en el caso que S tenga género dos. En ambos casos, S/τ es orientable; un toro con un borde ó una esfera con tres bordes.

Ejercicio. Verificar lo anterior.

Estas superficies corresponden a las siguientes dos familias de curvas algebraicas:

$$y^2 = (x^3 - \lambda^3)(x^3 - 1/\lambda^3)$$

donde una familia corresponde a $\lambda > 1$ y la otra a $\lambda = e^{i\theta}$, $\theta \in (0, \pi/3)$. En este caso, $K(S, \tau) = \langle \tau, j, \alpha, \beta \rangle$, donde

$$\tau = \begin{pmatrix} x \mapsto 1/\bar{x} \\ y \mapsto \bar{y}/\bar{x}^3 \end{pmatrix}; j = \begin{pmatrix} x \mapsto x \\ y \mapsto -y \end{pmatrix};$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} x \mapsto e^{2\pi i/3}x \\ y \mapsto y \end{pmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} x \mapsto 1/x \\ y \mapsto y/x^3 \end{pmatrix}$$

Observación 9.2. La superficie correspondiente a $\theta = \pi/6$, isomorfa a

$$y^2 = x^6 - 1,$$

tiene el automorfismo extra

$$\alpha^{1/2} = \begin{pmatrix} x \mapsto e^{\pi i/3}x \\ y \mapsto y \end{pmatrix}$$

y, en particular,

$$\tau_3 = \left(\begin{array}{c} x \mapsto \bar{x} \\ y \mapsto \bar{y} \end{array} \right); j^{1/2} = \left(\begin{array}{c} x \mapsto 1/x \\ y \mapsto iy/x^3 \end{array} \right)$$

Procederemos a uniformizar tales superficies usando grupo de Schottky y además calcularemos sus matrices de Riemann.

9.3.2. Uniformizaciones de Schottky y Matrices de Riemann. Tomemos el grupo $\widehat{K} = \widehat{K}_p$, para $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$. Consideremos las transformaciones de Möbius: $A_1 = JW JW^{-1}$, $A_2 = JW^{-1} JW$,

$B_1 = (\sigma_3 \sigma_2)^2$ y $B_2 = \sigma_1 B_1 \sigma_1$. Los grupos $G_2 = \langle A_1, A_2 \rangle$ y $F_2 = \langle B_1, B_2 \rangle$ resultan ser grupos de Schottky clásicos de género dos con un dominio fundamental estándar la región acotada por los círculos $W(C)$, $J(W(C))$, $W^{-1}(C)$ y $J(W^{-1}(C))$.

Ya que $WA_1W^{-1} = A_1^{-1}A_2$, $WA_2W^{-1} = A_1^{-1}$, $JA_1J = A_1^{-1}$, $JA_2J = A_2^{-1}$, $TA_1T^{-1} = A_2$, $TA_2T = A_1$, $\sigma A_1\sigma = A_1$, $\sigma A_2\sigma = A_2$, $WB_1W^{-1} = B_1^{-1}B_2$, $WB_2W^{-1} = B_1^{-1}$, $JB_1J = B_2^{-1}$, $JB_2J = B_1^{-1}$, $TB_1T = B_2$, $TB_2T = B_1$, $\sigma B_1\sigma = B_1$ y $\sigma B_2\sigma = B_2$, tenemos que ambos grupos G_2 y F_2 son subgrupos normales de \widehat{K} . Más aún, para $Q \in \{G_2, F_2\}$, $\widehat{K}/Q \cong D_3 + \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$ y $K/Q \cong D_3 + \mathbb{Z}_2$. En particular, la superficie de Riemann de género dos $S_2 = \Omega/G_2$ (respectivamente, $R_2 = \Omega/F_2$) admite el grupo \widehat{K}/G_2 (respectivamente, \widehat{K}/F_2) como grupo de automorfismos, con K/G_2 (respectivamente, K/F_2) como su subgrupo de índice dos consistiendo de los automorfismos holomorfos. El cociente $S_2/(\widehat{K}/G_2)$ (respectivamente, $R_2/(\widehat{K}/F_2)$) es un disco cerrado con cuatro valores de ramificación sobre su borde, cuyos ordenes son 2, 2, 2 y 3.

Teorema 9.3. *Sea S una superficie de Riemann maximal simétrica de género dos con una reflexión maximal $\tau : S \rightarrow S$ tal que S/τ es orientable. Entonces S puede ser uniformizada por G_2 ó F_2 para un valor de $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un valor de $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ y sea $K = K_p$ el grupo correspondiente. Sea S una superficie de Riemann maximal simétrica de género dos y una reflexión maximal $\tau : S \rightarrow S$ como en la hipótesis. La acción topológica de $K(S, \tau)$ está reflejada por G_2 o por F_2 (esto porque sólo hay dos posibles acciones). Supongamos que esta acción está reflejada por G_2 (el argumento será similar para la otra situación). Tomemos $S_2 = \Omega/G_2$ y sea $f : S_2 \rightarrow S$ un difeomorfismo que preserva orientación tal que $f\widehat{K}/G_2f^{-1} = K(S, \tau)$. En este caso, tenemos por la compacidad de S que f es un difeomorfismo casiholomorfo, con diferencial de Beltrami μ . Procedamos a levantar μ a Ω y extendámosla a toda la esfera como cero en el conjunto límite de \widehat{K} . Sea $W : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ un homeomorfismo casiholomorfo con coeficiente de Beltrami μ . Entonces $W\widehat{K}W^{-1}$ es de nuevo un grupo generado por reflexiones. Podemos asumir que W fija 0, 1 y ∞ . Ya que los puntos fijos de una reflexión es un círculo Euclideano, tenemos que el grupo $W\widehat{K}W^{-1}$ es uno de los grupos \widehat{K} para cierto valor de $q \in (2 - \sqrt{3}, 1)$. Si denotamos por $\pi : \Omega \rightarrow \Omega/G_2$ el cubrimiento holomorfo inducido por G_2 , entonces tenemos que $f\pi W^{-1} : \Omega(W\widehat{K}W^{-1}) \rightarrow S$ es una uniformización de S por el correspondiente grupo de Schottky G_2 . Además, el levantamiento del grupo $K(S, \tau)$ es exactamente $W\widehat{K}W^{-1}$. \square

Teorema 9.4. *Sea S una superficie de Riemann maximal simétrica de género dos con una reflexión maximal $\tau : S \rightarrow S$ tal que S/τ es un toro con un borde. Sea $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ tal que $S = \Omega/G_2$. Sean $q_1 = e^{(\frac{2\pi}{3} - \theta)i}$, $q_2 = J(q_1)$ y $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $\cos \theta = \frac{2p}{1+p^2}$.*

Entonces a Riemann matrix of S is dada por

$$Z = \frac{1}{1 + 10w^2 + 9w^4} \begin{bmatrix} 8w^2 + 4w(1 + 3w^2)i & -2(1 + 5w^2) - 2w(3w^2 - 1)i \\ -2(1 + 5w^2) - 2w(3w^2 - 1)i & 8w^2 + 4w(1 + 3w^2)i \end{bmatrix},$$

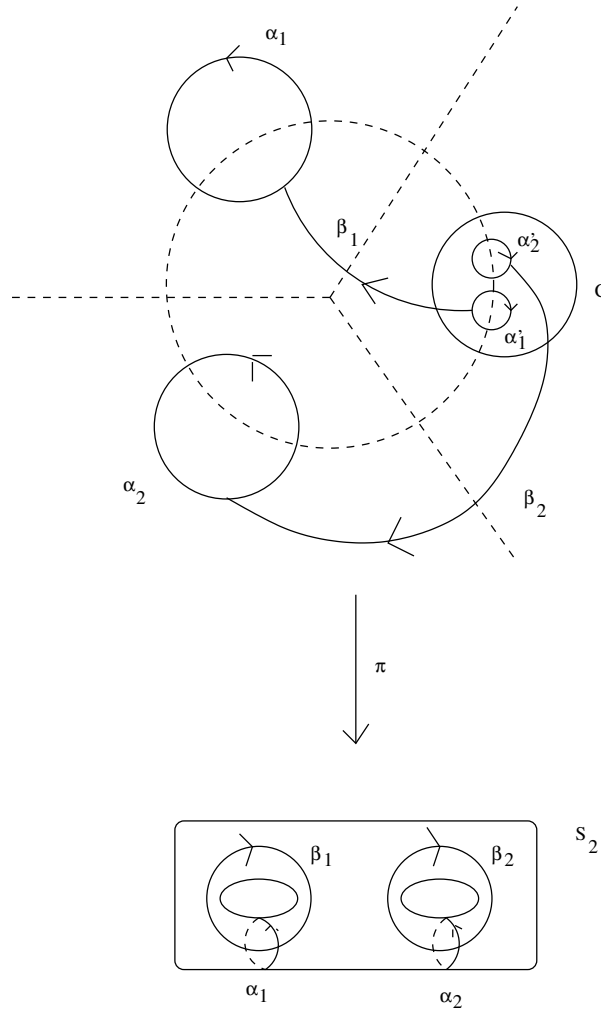


FIGURA 9.2. Arcos para G_2

donde $w > 0$ es tal que

$$\begin{cases} \frac{4w(1+3w^2)}{1+10w^2+9w^4} = \frac{1}{2\pi} \text{Log} \left(\prod_{\gamma \in G_\theta} \frac{|\gamma(q_2) - A_1^{-1}(\infty)|}{|\gamma(q_1) - A_1^{-1}(\infty)|} \right); \\ \frac{-2w(3w^2-1)}{1+10w^2+9w^4} = \frac{1}{2\pi} \text{Log} \left(\prod_{\gamma \in G_\theta} \frac{|\gamma(q_2) - A_2^{-1}(\infty)|}{|\gamma(q_1) - A_2^{-1}(\infty)|} \right). \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\alpha_1 = W(C)$, $\alpha'_1 = J(\alpha_1)$, $\alpha_2 = W^{-1}(C)$ y $\alpha'_2 = J(\alpha_2)$. Orientemos los círculos α_1 , α_2 , α'_1 y α'_2 como se muestra en la figura 9.2. También consideremos los arcos simples

orientados β_1 y β_2 , también mostrados en la figura 9.2. La proyección de esas curvas cerradas y arcos orientables se proyectan en una base simpléctica para la superficie de Riemann S_2 . De esta manera, obtenemos una representación simpléctica inyectiva (fiel)

$$\rho : \widehat{K}/G_2 \rightarrow \widetilde{\text{Sp}}(4; \mathbb{Z})$$

definida por

$$\rho(\sigma) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(J) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \rho(W) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & -1 \\ c & d & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de Riemann $Z = X + iY \in \mathcal{H}_2$ de S_2 definida por la base simpléctica anterior es un punto fijo del grupo simpléctico $\rho(\widehat{K}/G_2)$. De aquí se sigue que: $a = -1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, and

$$-Z^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + i\frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

donde $\tau > 0$.

De esta manera, la matriz Z tiene la forma deseada y los resultados de Burnside [Burnside] descritos anteriormente en la sección 8.3 pueden ser usados en este caso para el grupo G_2 para calcular el valor de w en función de p como está descrito en el teorema. \square

Observación 9.3. En el caso $p = 2 - \sqrt{3}$, el grupo G_2 resulta ser un grupo de Schottky anodado de género dos uniformizando una superficie estable de género dos con exactamente un nodo que divide. En el caso $p = 1$, podemos pensar que el grupo G_2 como el grupo trivial actuando en la esfera pinchada en tres puntos, esto es, uniformizando la esfera pinchada en tres puntos.

Teorema 9.5. Sea S una superficie de Riemann maximal simétrica de género dos con una reflexión maximal $\tau : S \rightarrow S$ tal que S/τ es una esfera con tres bordes. Sea $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ tal que $S = \Omega/F_2$. Sean $q_1 = e^{(\frac{2\pi}{3} - \theta)i}$, $p_2 = \sigma_3(q_1)$ y $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $\cos \theta = \frac{2p}{1+p^2}$. Entonces una matriz de Riemann para S es dada por

$$Z = \frac{i\mu}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

donde

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \text{Log} \left(\prod_{\gamma \in F_\theta} \frac{|\gamma(p_2) - B_1^{-1}(\infty)|}{|\gamma(q_1) - B_1^{-1}(\infty)|} \right).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\alpha_1 = W(C)$, $\alpha'_1 = \sigma_3(\alpha_1)$, $\alpha_2 = W^{-1}(C)$ y $\alpha'_2 = \sigma_3(\alpha_2)$. Si orientamos los círculos α_1 , α_2 , α'_1 , α'_2 , y consideramos los arcos orientados β_1 y β_2 como se muestra en la figura 9.3, entonces la proyección de esas curvas cerradas y arcos orientados determina una base simpléctica en la superficie de Riemann R_2 .

Obtenemos de esta manera una representación fiel

$$\rho : \widehat{K}/F_2 \rightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}}(4; \mathbb{Z})$$

definida por

$$\rho(\sigma) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(J) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho(W) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & -1 \\ c & d & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de Riemann $Z = X + iY \in \mathcal{H}_2$ de R_2 , definida por la base simpléctica anteriormente construida, es un puntos fijo para el grupo simpléctico $\rho(\widehat{K}/F_2)$. Se sigue que: $a = b = c = d = 0$, y

$$-Z^{-1} = \frac{i\tau}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

donde $\tau = 3\mu/4 > 0$.

De nuevo los resultados de las sección 8.3 determina el valor de μ como se desea. \square

Observación 9.4. (1) En el caso $p = 2 - \sqrt{3}$, el grupo F_2 es un grupo de Schottky anodado de género dos uniformizando una superficies de Riemann estable de género dos con exactamente tres nodos (cada uno de ellos no dividiendo). En el caso $p = 1$, podemos pensar que el grupo F_2 ctúa trivialmente en la esfera pinchada entres puntos, luego uniformizando esta.

(2) Notemos en este punto que los resultados en [Farkas-Kra] (ver también el trabajo de González-Díez [Gabino]) nos permite describir la curva algebraica (usando funciones theta) de las superficies S_2 y R_2 en función de w y, en particular, de p . De esta manera, podemos obtener una relación explícita entre los grupos de Schottky G_2 , F_2 y las respectivas curvas algebraicas.

(3) Es importante notar a este punto que usando Theta características [Farkas-Kra] podemos describir la curva algebraica en función de w y luego en función de p . De esta manera podemos obtener relaciones explícitas entre la uniformización de Schottky dada por los grupos de Schottky G_2 , F_2 y las respectivas curvas algebraicas. The holomorphic map

$$F : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} : z \mapsto \frac{\widehat{w}_1(z)}{\widehat{w}_2(z)}$$

gives us a holomorphic branched covering for the group $\langle j, WjW^{-1}, W^{-1}jW \rangle$, where $j(z) = \sigma_3\sigma_1(z)$. The branched covering map F is a lifting of the two-fold branched covering $S = \Omega/J \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ induced by the hyperelliptic involution. It follows that the algebraic curve defining S is given by

$$y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e)(x - f)$$

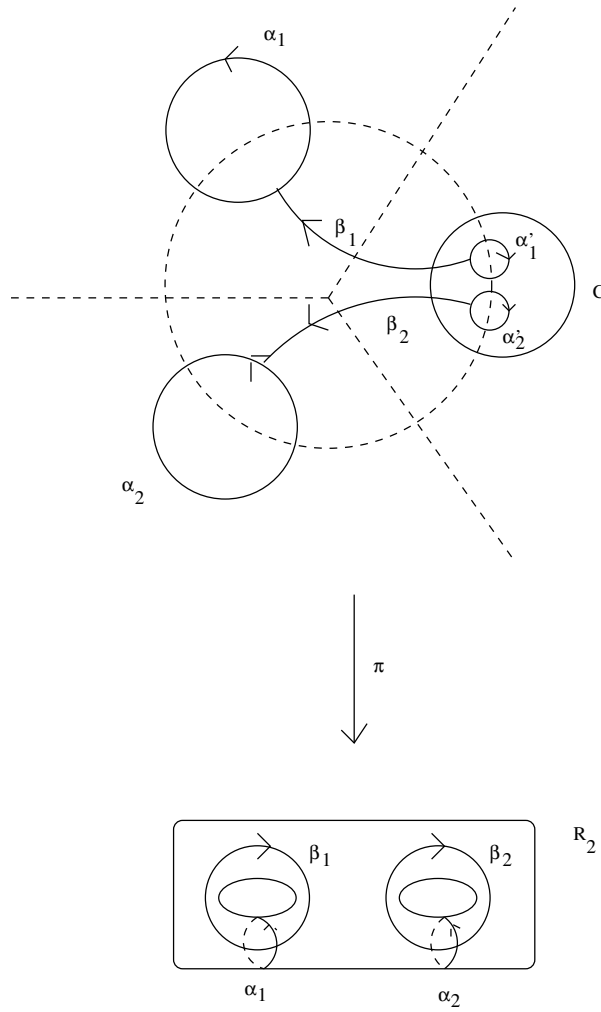


FIGURA 9.3. Arcos para F_2

$$\text{where } \begin{cases} a = F(p) \\ b = F(W(p)) \\ c = F(W^2(p)) \\ d = F(\frac{1}{p}) \\ e = F(W(\frac{1}{p})) \\ f = F(W^2(\frac{1}{p})) \end{cases}$$

9.4. Superficies Maximales Simétricas de Género 3

9.4.1. Acciones Topológicas. Consideremos una superficie de Riemann maximal simétrica S de género 3 con una reflexión maximal $\tau : S \rightarrow S$. Tenemos que $K^+(S, \tau)$ es un grupo de automorfismos holomorfos de orden 24 tal que $S/K^+(S, \tau)$ es la esfera de Riemann con exactamente cuatro valores de ramificación de ordenes 2, 2, 2 y 3. Más aún, existe una reflexión $\eta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, inducida por τ , tal que esos valores de ramificación están contenidos en el círculo de puntos fijos

de η . Ya que S no puede ser hiperelíptica, el grupo holomorfo $K^+(S, \tau)$ es isomorfo al grupo de permutaciones de cuatro letras S_4 [Vermeulen] y además esta acción es topológicamente rígida. Sean $R = S\tau$ y $H_{24} = K(S, \tau)/\tau$ el grupo de automorfismos inducidos en la superficie de Klein R . Entonces tenemos que, módulo homeomorfismos, R puede ser uno de los siguientes:

- (i) Un toro con dos bordes;
- (ii) Una esfera con cuatro bordes;
- (iii) La suma conexa de toro con un plano proyectivo y con un borde;
- (iv) La suma conexa de dos planos proyectivos y con un borde; y
- (v) un plano proyectivo con tres bordes.

Teorema 9.6. *Las únicas posibilidades para R son dadas por los casos (ii) y (v), esto es, sólo existen dos acciones topológicamente diferentes de $K(S, \tau)$. Más aún, si denotamos por τ_1 y τ_2 las dos posibles acciones topológicas de τ , entonces $K(S, \tau_1)$ y $K(S, \tau_2)$ no son isomorfos como grupos abstractos.*

DEMOSTRACIÓN. Primero procederemos a ver que los casos (i), (iii) y (iv) no son posibles.

(1) Caso(i): En esta situación, tendríamos la existencia de una superficie de género uno con dos puntos distinguidos $p \neq q$ y un grupo de automorfismos holomorfo/antiholomorfo H_{24} de orden 24 actuando transitivamente en $\{p, q\}$. Dentro de H_{24} tenemos un subgrupo de índice dos H_{12} consistiendo de automorfismos holomorfos. Las posibilidades para el estabilizador de p en este subgrupo son: (1) un grupo cíclico de orden 12, el cual no es posible; o (2) un grupo cíclico de orden 6. En este caso, un tal grupo cíclico debe también estabilizar el punto q . Pero en género uno no todo grupo cíclico de orden 6 de automorfismos holomorfos tiene a lo más un punto fijo.

(2) Caso (iii): Consideremos el cubrimiento doble orientable X de R . Tenemos entonces que X es una superficie de Riemann de género dos con exactamente dos bordes admitiendo un automorfismo antiholomorfo de orden dos $\eta : X \rightarrow X$, actuando sin puntos fijos, tal que $R = X/\eta$. Podemos levantar H_{24} a un grupo de automorfismos holomorfos/antiholomorfos de X , de orden 48, denotado por K_{48} . Es claro que K_{48} debe contener η (levantamiento de la identidad). Dentro K_{48} tenemos un subgrupo de índice dos de K_{24} consistiendo de automorfismos holomorfos de X . Esto nos daría la existencia de una superficie de Riemann de género 2 con dos puntos distinguidos $p \neq q$ tal que $\{p, q\}$ es invariante por la acción del grupo K_{24} . Se sigue que el estabilizador de p sólo podría ser un grupo cíclico de orden 24 ó 12. Ambas situaciones contradicen el hecho que en género dos todo automorfismo tiene orden menor o igual a 10.

(3) Caso (iv): Similar al caso (2) con X una superficie de Riemann de género uno con cuatro bordes. En este caso, tendríamos la existencia de una superficie de Riemann de género uno con cuatro puntos distinguidos p_1, p_2, p_3 y p_4 , $p_i \neq p_j$, y un grupo de orden 24 de automorfismos holomorfos de esta, dejando invariante $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. De nuevo, el estabilizador en este grupo de p_j no puede ser un grupo cíclico de orden 24 ó 12. En particular, el estabilizador de p_j es un grupo cíclico de orden 6. Pero en este caso el estabilizador $T_6 = \langle t : t^6 = 1 \rangle$ de p_1 permuta los otros tres puntos. Se sigue que o bien T_6 estabiliza uno de esos otros tres puntos, lo cual es imposible, ó $h = t^2$ fija cuatro puntos diferentes, lo cual también se sabe que es imposible en una superficie de Riemann de género uno.

La segunda parte es mostrar que los casos (ii) y (v) son posibles. Esto será hecho en la siguiente subsección. También se deducirla última parte del teorema directamente de tal construcción. \square

Observación 9.5. Las superficies de Riemann maximales simétricas de género 3 son algebraicamente descritas por las siguientes curvas en el plano proyectivo complejo \mathbb{P}_2 [**Gonzalez-Rodriguez**]:

$$S : x^4 + y^4 + z^4 + \lambda(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = 0,$$

donde $\lambda \in (-\infty, -2)$ para el caso (v) y $\lambda \in (-2, -1)$ para el caso (ii). La reflexión τ es dada por $\tau[x : y : z] = [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]$, y $K^+(S, \tau)$ es el grupo simétrico en cuatro letras \mathcal{S}_4 generado por las siguientes transformaciones proyectivas

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9.4.2. Uniformizaciones de Schottky y Matrices de Riemann. Consideremos el grupo $\widehat{K} = \widehat{K}_p$, para $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$. Sea G_3 el grupo generado por las transformaciones $A_1 = (\sigma_p \sigma_2)^3$, $A_2 = WA_1W^{-1}$ and $A_3 = W^{-1}A_1W$, y F_3 el grupo generado por las transformaciones $B_1 = \sigma \sigma_p \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_p \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2$, $B_2 = WB_1W^{-1}$ and $B_3 = W^{-1}B_1W$.

Teorema 9.7. *Los grupos G_3 y F_3 son subgrupos normales de \widehat{K} , ambos de índice 48. Más aún, cada uno de ellos es un grupo de Schottky clásico de género 3.*

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que esos grupos son de Schottky clásicos y género 3, con dominio fundamental acotado por los círculos $C_1 = \sigma_p(C_2)$, $C_6 = \sigma_1(C_1)$, $C_2 = W(C_6)$, $C_3 = W(C_1)$, $C_5 = W^{-1}(C_1)$ y $C_4 = W^{-1}(C_6)$, donde $C = \text{Fix}(\sigma_p)$.

Si mostramos que ellos son subgrupos normales, entonces un cálculo directo muestra que \widehat{K}/G_3 y \widehat{K}/F_3 son grupos de orden 48 no-isomorfos.

Es fácil verificar que:

$$\begin{aligned} (1) \sigma_1 A_1 \sigma_1 &= A_3^{-1}, & (2) \sigma_1 A_2 \sigma_1 &= A_2^{-1}, \\ (3) \sigma_2 A_1 \sigma_2 &= A_1^{-1}, & (4) \sigma_2 A_2 \sigma_2 &= A_3^{-1}, \\ (5) \sigma_p A_1 \sigma_p &= A_1^{-1}, & (6) \sigma_p A_2 \sigma_p &= A_1 A_2 A_3, \\ (7) \sigma_p A_3 \sigma_p &= A_3^{-1}, & (8) \sigma A_1 \sigma &= A_1, \\ (9) \sigma A_2 \sigma &= A_2, & (10) \sigma A_3 \sigma &= A_3, \\ (11) \sigma_1 B_1 \sigma_1 &= B_3^{-1}, & (12) \sigma_1 B_2 \sigma_1 &= B_2^{-1}, \\ (13) \sigma_2 B_1 \sigma_2 &= B_1^{-1}, & (14) \sigma_2 B_2 \sigma_2 &= B_3^{-1}, \\ (15) \sigma_p B_1 \sigma_p &= B_3, & (16) \sigma_p B_2 \sigma_p &= B_3^{-1} B_2^{-1} B_1^{-1}, \\ (17) \sigma B_1 \sigma &= B_1, & (18) \sigma B_2 \sigma &= B_2, \\ (19) \sigma B_3 \sigma &= B_3, \end{aligned}$$

mostrando la normalidad de esos grupos. \square

Teorema 9.8. *Sea S una superficie de Riemann maximal simétrica de género 3 admitiendo una reflexión maximal $\tau : S \rightarrow S$. (i) Si S/τ es orientable, entonces S puede ser uniformizada por G_3 para un cierto valor de $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$; (ii) Si S/τ es no-orientable, entonces S puede ser uniformizada por F_3 para cierto valor de $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$.*

DEMOSTRACIÓN. la demostración es exactamente la misma como en el caso de género dos. \square

Procedemos a calcular la matrices de Riemann de cada superficie de Riemann maximal simétrica de género 3 con la ayuda de las uniformizaciones de Schottky obtenidas.

Para el grupo G_3 escojamos $\alpha_1 = C_2$ orientada en el sentido opuesto a las manecillas de un reloj, $\alpha'_1 = C_1$ con la orientación de α_1 inducida por A_1 . Tomemos $\alpha_2 = W(\alpha_1)$, $\alpha_3 = W^{-1}(\alpha_1)$, $\alpha'_2 = W(\alpha'_1)$,

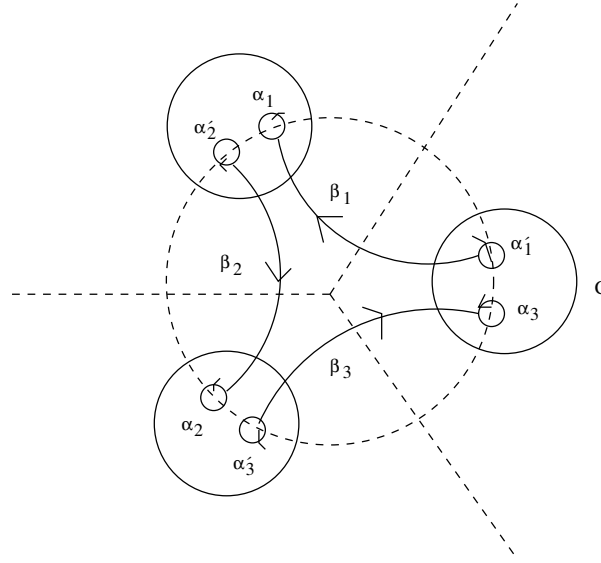


FIGURA 9.4. Arcos para G_3

$\alpha'_3 = W^{-1}(\alpha'_1)$. Consideremos también arcos simples orientados β_1, β_2 y β_3 como es mostrado en figura 9.4.

Para el grupo F_3 escojamos $\alpha_1 = C_3$ orientada en el sentido opuesto a las manecillas de un reloj, $\alpha'_1 = C_6$ con la orientación inducida por B_1 de la dada a α_1 . Tomemos $\alpha_2 = W(\alpha_1), \alpha_3 = W^{-1}(\alpha_1), \alpha'_2 = W(\alpha'_1), \alpha'_3 = W^{-1}(\alpha'_1)$. Consideremos arcos simples orientados β_1, β_2 y β_3 como se muestra en la figura 9.5.

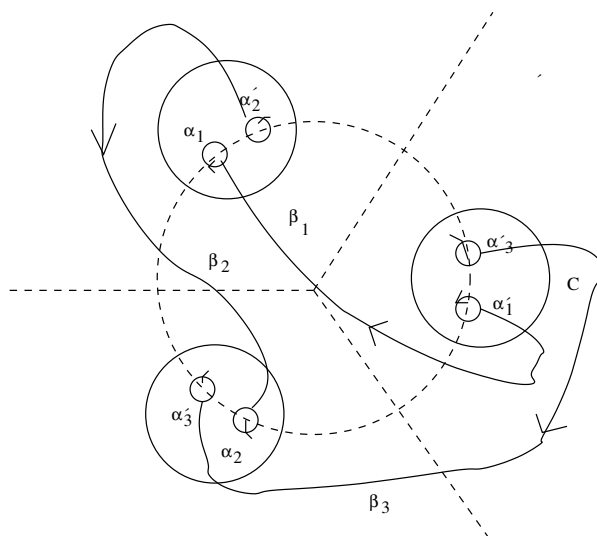
En cada uno de los dos casos mencionados, las curvas cerradas orientadas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, y los arcos simples orientados β_1, β_2 y β_3 se proyectan a una base simpléctica en la superficie de Riemann uniformizada S . Obtenemos entonces representaciones simplécticas

$$\theta_1 : \widehat{K}/G_3 \rightarrow \widetilde{\text{Sp}}_6(\mathbb{Z})$$

$$\theta_2 : \widehat{K}/F_3 \rightarrow \widetilde{\text{Sp}}_6(\mathbb{Z})$$

dadas por:

$$\theta_1(\sigma) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

FIGURA 9.5. Arcos para F_3

$$\theta_1(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\theta_1(J) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$\theta_1(W) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$\theta_2(\sigma) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$$

$$\theta_2(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\theta_2(J) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^t$$

$$\theta_2(W) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$$

Siguiendo los mismos argumentos hechos para el caso de género dos, uno obtiene:

Teorema 9.9. *Sea S una superficie de Riemann maximal simétrica de género 3 con una reflexión maximal $\tau : S \rightarrow S$ tal que S/τ es orientable. Sea $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ de manera que $S = \Omega/G_3$. Entonces una matriz de Riemann para S es dada por*

$$Z = \frac{it}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

donde

$$t = \frac{1}{\pi} \text{Log} \left(\prod_{\gamma \in G_3} \frac{|\gamma(r_p) - A_1^{-1}(\infty)|}{|\gamma(s_p) - A_1^{-1}(\infty)|} \right),$$

$$r_p = \sigma_p(e^{(\frac{2\pi}{3} - \theta)i}), \quad s_p = \sigma_2(r_p)$$

y $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ satisface $\cos \theta = \frac{2p}{1+p^2}$.

Teorema 9.10. *Sea S una superficie de Riemann maximal simétrica de género 3 con una reflexión maximal $\tau : S \rightarrow S$ tal que S/τ es no-orientable. Sea $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ de manera que $S = \Omega/F_3$. Entonces una matriz de Riemann para S es dada por*

$$Z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + ti \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

La matriz de Riemann $-Z^{-1}$ es la matriz de Riemann que corresponde para usar el método de Burnside y obtener el valor de t en términos de p .

- Observación 9.6.** (1) En el caso $p = 2 - \sqrt{3}$, el grupo G_3 es un grupo de Schottky anodado de género tres uniformizando una superficie de Riemann stable de género tres con exactamente cuatro nodes (cada uno de ellos no dividiendo) y two componentes, cada una de ellas una esfera con cuatro pinchaduras. En el caso $p = 1$, podemos pensar que el grupo G_3 actúa de manera trivial en la esfera de Riemann con tres pinchaduras, esto es, uniformizándola. Para $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$, el grupo G_3 uniformiza las curvas algebraicas correspondientes a $\lambda \in (-2, -1)$; para $p = 2 - \sqrt{3}$ este uniformiza la curva algebraica correspondiente a $\lambda = -1$; y para $p = 1$ este uniformiza la curva algebraica para $\lambda = -2$.
- (2) En el caso $p = 2 - \sqrt{3}$, el grupo F_3 es un grupo de Schottky anodado de género tres uniformizando una superficie de Riemann stable de género tres con exactamente tres nodes (cada uno de ellos no dividiendo) y una componente (una esfera con seis pinchaduras). En el caso $p = 1$, podemos pensar que el grupo F_3 actúa trivialmente en la esfera de Riemann pinchada en tres puntos, esto es, uniformizándola. Para $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$, el grupo F_3 uniformiza las curvas algebraicas correspondientes a $\lambda \in (-\infty, -2)$; para $p = 2 - \sqrt{3}$ este grupo uniformiza la curva algebraica correspondiente a $\lambda = -\infty$; y para $p = 1$ este uniformiza la curva algebraica para $\lambda = -2$.

9.5. Superficies de Riemann Maximal Simétricas de Género 5

9.5.1. Topological Actions. Consideraremos superficies de Riemann maximales simétrica S de género 5 con una reflexión maximal $\tau : S \rightarrow S$ tal que S/τ es orientable. El caso en que S/τ es no-orientable es dejado como un ejercicio.

- Teorema 9.11.** (1) *En género 5 hay exactamente dos reflexiones maximales topológicamente diferentes con la condición que el cociente es orientable.*
- (2) *Sean (S_1, τ_1) y (S_2, τ_2) dos pares, donde S_j es una superficie de Riemann maximal simétrica de género 5 y τ_j una reflexión maximal de S_j . Supongamos que τ_1 y τ_2 no son topológicamente equivalentes. Entonces los respectivos grupos $K(S_1, \tau_1)$ y $K(S_2, \tau_2)$ son no isomorfos como grupos abstractos. Más aún, las acciones respectivas de $K(S_j, \tau_j)$ son topológicamente rígidas.*
- (3) *Sea S una superficie de Riemann maximal simétrica de género 5 con una reflexión maximal $\tau : S \rightarrow S$. Entonces existe un subgrupo normal L de $K(S, \tau)$, isomorfo a $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$, de automorfismos holomorfos actuando sin puntos fijos tal que S/L es una superficie de Riemann de género dos.*

Observación 9.7. En particular, el resultado anterior dice que en el espacio de Módulos de superficies de género 5 hay exactamente dos subvariedades algebraicas reales, cada una de dimensión real uno, determinando las superficies de Riemann maximales simétricas con cociente orientable.

DEMOSTRACIÓN. Ya que S/τ es orientable, tenemos exactamente tres posibilidades:

- (1) S/τ es un toro con cuatro bordes;
- (2) S/τ es una esfera con seis bordes; y
- (3) S/τ es una superficie de género dos con dos bordes.

Como τ pertenece al centro de $K(S, \tau)$, tenemos que $K(S, \tau)$ desciende a un grupo de automorfismos H_{48} , de orden 48, del cociente S/τ .

- (1) **S/τ es un toro con cuatro bordes.** Denotemos por H_{48} el grupo de orden 48 de automorfismos de S/τ inducido por H_{96} . Si H_{48} sólo tiene automorfismos holomorfos, entonces esto implicaría la existencia de un grupo de automorfismos holomorfos de orden 48 actuando en una superficie de Riemann de género uno dejando transitivamente invariante un conjunto formado por 4 puntos. Esto diría que el estabilizador de cualquiera de esos

cuatro puntos, en tal grupo, es un grupo cíclico de orden 12, lo cual es imposible. Luego, H_{48} debe contener automorfismos antiholomorfos. Sea H_{24} el subgrupo de índice dos de H_{48} consistiendo de automorfismos holomorfos. La acción de tal grupo corresponde (topológicamente) a la acción de un grupo de automorfismos holomorfos de orden 24 en una superficie de Riemann de género uno con cuatro pinchaduras. Esta acción es la única acción del grupo generado por el grupo alternante $\mathcal{A}_4 = \langle W, T \rangle$ y una involución J , donde cada pinchadura es fijada por J . En este caso, la superficie de género uno corresponde a la curva $y^2 = x^3 - 1$ y el grupo H_{48} es generado por las transformaciones $J : (x, y) \rightarrow (x, -y)$, $S : (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$, $T : (x, y) \rightarrow (\frac{x+2}{x-1}, \frac{3y}{(x-1)^2})$ y $W : (x, y) \rightarrow (\rho x, y)$, donde $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. El grupo H_{24} es el grupo alternante generado por W y T . En particular, la acción topológica de $K(S, \tau)$ es única en esta situación y tiene la presentación: $K(S, \tau) = \langle T, W, J, \tau : T^2 = W^3 = J^2 = \tau^2 = (TW)^2 = (TJ)^2 = (T\tau)^2 = \tau W \tau W^{-1} = (\tau J)^2 = (JWJW^{-1})^2 = (\tau W)^6 = 1 \rangle$.

Es importante observar que $K(S, \tau)$ tiene dos involuciones holomorfos (las correspondientes a J y τST), las cuales generan el grupo de Klein $L = \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$. L actúa sin puntos fijos y es un subgrupo normal. La superficie cociente S/L es una superficie de Riemann de género dos con grupo de automorfismos $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2 + D_3$, donde D_3 denota al grupo dihedral de orden 6. Uno de los factores \mathbb{Z} es generado por la reflexión inducida por τ , la cual tiene exactamente una componente de puntos fijos que es una geodésica simple cerrada γ . Tal geodésica γ divide S/L en dos toros con un borde, T_1 y T_2 . La otra componente \mathbb{Z}_2 es generada por la involución hiperelíptica, y por último, D_3 es el grupo dihedral generado por un automorfismo de orden 3 que deja invariante cada T_i y una involución holomorfa que permuta T_1 con T_2 .

- (2) **S/τ es una esfera con seis bordes.** Sea H_{48} el grupo de automorfismos inducido por H_{96} en este cociente. Si H_{48} sólo contiene automorfismos holomorfos, entonces esto implicará la existencia de un grupo de transformaciones de Möbius de orden 48, el cual deja transitivamente invariante un conjunto de 6 puntos, lo cual no es posible. Luego, H_{48} contiene automorfismos antiholomorfos. Denotemos por H_{24} el subgrupo de índice dos de H_{48} consistiendo de automorfismos holomorfos. Topológicamente este grupo corresponde a la acción del grupo simétrico $\mathcal{S}_4 = \langle a, b : a^4 = b^2 = (ab)^3 = 1 \rangle$, donde los seis puntos especiales son exactamente los seis puntos fijos de los elementos de orden 4. Un automorfismo antiholomorfo extra puede ser escogido como una reflexión la cual fija cuatro de esos puntos e intercambia los otros dos. En particular, la acción topológica de $K(S, \tau)$ es única y tiene presentación: $K(S, \tau) = \langle a, b, \mu, \tau : a^4 = b^2 = \mu^2 = \tau^2 = (ab)^3 = \tau a \tau a^{-1} = (\tau b)^2 = (\mu \tau)^2 = \mu a \mu a^{-1} = \mu b \mu a^2 b a^2 = 1 \rangle$.

El grupo $L = \langle a^2, ba^2b \rangle \cong \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$ es un subgrupo normal de $K(S, \tau)$, el cual actúa sin puntos fijos. El cociente S/L es una superficie de Riemann de género dos admitiendo el grupo de automorfismos $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2 + D_3$. En este caso, uno de los factores \mathbb{Z}_2 está generado por una reflexión (la inducida por τ) la cual tiene exactamente tres componentes de puntos fijos (una M-simetría). Esas tres componentes dividen S/L en dos esferas con tres bordes, S_1 y S_2 . La otra componente \mathbb{Z}_2 está generado por la involución hiperelíptica, y el factor D_3 está generado por un automorfismo de orden tres que deja invariante cada S_i y una involución holomorfa que también deja invariante cada S_i .

- (3) **S/τ es una superficie de género dos con dos bordes.** Sea de nuevo H_{48} el grupo inducido por H_{96} . Tenemos que este consiste de automorfismos holomorfos o tiene un subgrupo de índice dos consistiendo de automorfismos holomorfos. En cualquiera de esos dos situaciones, tendremos un grupo de automorfismos holomorfos de orden 48 ó 24 sobre una

superficie de Riemann de género dos dejando invariante dos puntos especiales. El estabilizador de cualquiera de esos dos puntos tendría que ser un grupo cíclico de orden 24 ó 12, lo cual no es posible.

En ambos casos (1) y (2), la familia de superficies depende en un parámetro real. Esto es consecuencia del hecho que el espacio de Teichmüller del disco cerrado con cuatro valores de ramificación sobre su borde tiene dimensión real uno. \square

9.5.2. Uniformizaciones de Schottky y Matrices de Riemann. Consideremos el grupo $\widehat{K} = \widehat{K}_p$ con $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$. Sea G_5 (respectivamente, F_5) el subgrupo de G_2 (respectivamente, F_2), construido en sección 8.2., generado por los cuadrados de todos los elementos de G_2 (respectivamente, F_2), es decir:

$$G_5 = \langle x^2 : x \in G_2 \rangle$$

$$F_5 = \langle x^2 : x \in F_2 \rangle.$$

Ya que G_2 (respectivamente, F_2) es un subgrupo normal de índice 24 en \widehat{K} y G_5 (respectivamente, F_5) es normal de índice 4 en G_2 (respectivamente, F_2), tenemos que G_5 (respectivamente, F_5) es un subgrupo normal de \widehat{K} de índice 96. El grupo G_5 (respectivamente, F_5) es un grupo libre de índice cuatro en el grupo de Schottky G_2 (respectivamente, F_2), luego un grupo de Schottky de género 5. Generadores de Schottky para G_5 (respectivamente, F_5) son $D_1 = A_1^2$, $D_2 = A_2^2$, $D_3 = A_1^{-1}A_2^2A_1$, $D_4 = A_1^{-1}A_2^{-1}A_1A_2$ y $D_5 = A_2^{-1}A_1A_2A_1$ (respectivamente, $E_1 = B_1^2$, $E_2 = B_2^2$, $E_3 = B_1^{-1}B_2^2B_1$, $E_4 = B_1^{-1}B_2^{-1}B_1B_2$ y $E_5 = B_2^{-1}B_1B_2B_1$).

Teorema 9.12. *Si S es una superficie de Riemann maximal simétrica de género cinco con una reflexión maximal $\tau : S \rightarrow S$ tal que S/τ es orientable, entonces esta puede ser uniformizada por G_5 ó F_5 para algún $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración es la misma que la hecha para el caso de género dos. \square

Observación 9.8. En el caso $p = 2 - \sqrt{3}$, el grupo G_5 es un grupo de Schottky anodado que uniformiza una superficie estable de género cinco con exactamente cuatro nodos (cada uno de ellos no dividiendo) y dos componentes, cada una de ellas una superficie de género uno. De manera similar, el grupo F_5 es un grupo de Schottky anodado que uniformiza una superficie estable de género cinco con exactamente seis nodos (cada uno de ellos no dividiendo) y dos componentes, cada una de ellas una esfera.

Un dominio fundamental estándar para G_5 (respectivamente, F_5) respecto a los generadores de Schottky dados anteriormente es determinado por la región acotada por los círculos $\theta_1 = A_1^{-1}(\alpha_1)$, $\theta'_1 = \alpha'_1$, $\theta_2 = A_2^{-1}(\alpha_2)$, $\theta'_2 = \alpha'_2$, $\theta_3 = A_1^{-1}A_2^{-1}(\alpha_2)$, $\theta'_3 = A_1^{-1}(\alpha'_2)$, $\theta_4 = A_2^{-1}(\alpha_1)$, $\theta'_4 = A_1^{-1}A_2^{-1}(\alpha'_1)$, $\theta_5 = A_1^{-1}A_2^{-1}(\alpha_1)$ y $\theta'_5 = A_2^{-1}(\alpha'_1)$ (respectivamente, $\theta_1 = B_1^{-1}(\alpha_1)$, $\theta'_1 = \alpha'_1$, $\theta_2 = B_2^{-1}(\alpha_2)$, $\theta'_2 = \alpha'_2$, $\theta_3 = B_1^{-1}B_2^{-1}(\alpha_2)$, $\theta'_3 = B_1^{-1}(\alpha'_2)$, $\theta_4 = B_2^{-1}(\alpha_1)$, $\theta'_4 = B_1^{-1}B_2^{-1}(\alpha'_1)$, $\theta_5 = B_1^{-1}B_2^{-1}(\alpha_1)$ y $\theta'_5 = B_2^{-1}(\alpha'_1)$).

Podemos dotar a las curvas θ_k de las orientaciones determinadas por las orientaciones dadas en 8.2., a las curvas α_1 , α_2 , α'_1 y α'_2 . Escojamos los siguientes arcos simples: $\delta_1 = \beta_1 \cup A_1^{-1}(\beta_1)$, $\delta_2 = \beta_2 \cup A_2^{-1}(\beta_2)$, $\delta_3 = A_1^{-1}(\delta_2)$ (respectivamente, $\delta_1 = \beta_1 \cup B_1^{-1}(\beta_1)$, $\delta_2 = \beta_2 \cup B_2^{-1}(\beta_2)$, $\delta_3 = B_1^{-1}(\delta_2)$), con las orientaciones determinadas por las dadas en 8.2., a los arcos β_1 y β_2 . Para $j = 4, 5$, escogemos arcos simples orientados y disjuntos δ_j contenidos dentro del disco unitario, de manera que δ_j parte en θ_j , termina en θ'_j y es disjunto de ambos δ_1 y δ_{9-j} . Las proyecciones todos esas curvas cerradas

$$\rho(T) = \eta(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} & t_{35} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} & t_{45} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & t_{55} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$\rho(J) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} & j_{15} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} & j_{25} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} & j_{35} \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & j_{41} & j_{42} & j_{43} & j_{44} & j_{45} \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & j_{51} & j_{52} & j_{53} & j_{54} & j_{55} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$\eta(J) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} & j_{15} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} & j_{25} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} & j_{35} \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & j_{41} & j_{42} & j_{43} & j_{44} & j_{45} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & j_{51} & j_{52} & j_{53} & j_{54} & j_{55} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^t$$

$$\rho(W) = \eta(W) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} & w_{15} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} & w_{25} \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} & w_{35} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} & w_{45} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & w_{51} & w_{52} & w_{53} & w_{54} & w_{55} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^t$$

Teorema 9.13. *Sea S una superficie de Riemann maximal simétrica de género 5 con reflexión maximal $\tau : S \rightarrow S$ tal que S/τ es una superficie de género uno con cuatro bordes. Sea $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ de manera que $S = \Omega/G_5$. Entonces una matriz de Riemann para S es dada por:*

$$Z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 2u+v & u+v & u+v & v & 2(u+v) \\ u+v & 2u+v & 2u+3v & -v & u+2v \\ u+v & 2u+3v & 2u+v & v & u \\ v & -v & v & -3v & 2v \\ 2(u+v) & u+2v & u & 2v & 2u \end{bmatrix}.$$

La matriz de Riemann a usar para el método de Burnside es $-Z^{-1}$. Así se pueden obtener los valores u y v en términos explícitos de p .

Teorema 9.14. Sea S una superficie de Riemann maximal simétrica de género 5 con una reflexión maximal $\tau : S \rightarrow S$ tal que S/τ es de género cero con seis bordes. Sea $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ de manera que $S = \Omega/F_5$. Entonces una matriz de Riemann para S es dada por:

$$Z = i \begin{bmatrix} 2u+v & u+v & u+v & v & 2(u+v) \\ u+v & 2u+v & 2u+3v & -v & u+2v \\ u+v & 2u+3v & 2u+v & v & u \\ v & -v & v & -3v & 2v \\ 2(u+v) & u+2v & u & 2v & 2u \end{bmatrix}.$$

La matriz de Riemann a usar para el método de Burnside es $-Z^{-1}$. Así se pueden obtener los valores u y v en términos explícitos de p .

TEOREMAS 9.13 Y 9.14. (1) Verifiquemos el teorema 9.13. La matriz de Riemann $Z = X + iY \in \mathcal{H}_5$ para S_5 definida por la base simpléctica antes considerada es un punto fijo del grupo simpléctico $\rho(\widehat{K}/G_5)$. Los cálculos muestran que: $t_{nm} = j_{nm} = 0$, $w_{11} = w_{15} = -w_{21} = -w_{22} = -w_{31} = -w_{32} = w_{41} = w_{45} = -1$, $w_{22} = w_{23} = w_{24} = w_{31} = w_{24} = w_{25} = w_{31} = w_{34} = w_{35} = w_{41} = w_{42} = w_{43} = w_{44} = w_{45} = w_{52} = w_{53} = w_{54} = 0$, y

$$Z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 2u+v & u+v & u+v & v & 2(u+v) \\ u+v & 2u+v & 2u+3v & -v & u+2v \\ u+v & 2u+3v & 2u+v & v & u \\ v & -v & v & -3v & 2v \\ 2(u+v) & u+2v & u & 2v & 2u \end{bmatrix},$$

donde $0 < -v < u$.

(2) Ahora verifiquemos el teorema 9.14. La matriz de Riemann $Z = X + iY \in \mathcal{H}_5$ para R_5 definida por la base simpléctica antes considerada es un punto fijo del grupo simpléctico $\eta(\widehat{K}/F_5)$. Obtenemos entonces que: $t_{nm} = j_{nm} = w_{nm} = 0$, y

$$Z = i \begin{bmatrix} 2u+v & u+v & u+v & v & 2(u+v) \\ u+v & 2u+v & 2u+3v & -v & u+2v \\ u+v & 2u+3v & 2u+v & v & u \\ v & -v & v & -3v & 2v \\ 2(u+v) & u+2v & u & 2v & 2u \end{bmatrix},$$

donde $0 < -v < u$.

(3) Procedamos a encontrar las relaciones de los coeficientes de las respectivas matrices de Riemann.

Consideremos el cubrimiento regular $P : S_5 \rightarrow S_2$ (respectivamente, $P : R_5 \rightarrow R_2$), cuyo grupo de cubrimiento es el grupo de Klein $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$ generado por los automorfismos de S_5 (respectivamente, R_5) inducidos por A_1 and A_2 (respectivamente, B_1 and B_2).

Tenemos que $H_1(P) : H_1(S_5, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S_2, \mathbb{Z})$ (respectively, $H_1(P) : H_1(R_5, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(R_2, \mathbb{Z})$) es dado por:

- (1) $H_1(P)(\theta_1) = H_1(P)(\theta_4) = H_1(P)(\theta_5) = \alpha_1$,
- (2) $H_1(P)(\theta_2) = H_1(P)(\theta_3) = \alpha_2$,
- (3) $H_1(P)(\delta_1) = H_1(P)(\delta_5) = 2\beta_1$,
- (4) $H_1(P)(\delta_2) = H_1(P)(\delta_3) = 2\beta_2$ y
- (5) $H_1(P)(\delta_4) = 0$.

Denotemos por w_1 y w_2 las 1-formas holomorfas duales de α_1 y α_2 , respectivamente, para la superficie de Riemann S_2 (respectivamente, R_2).

Similarmente, denotemos por $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ y η_5 las 1-formas holomorfas duales de $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ y θ_5 , respectivamente, para la superficie de Riemann S_5 (respectivamente, R_5).

El "pull-back" de las 1-formas holomorfas $P^* : H^{1,0}(S_2) \rightarrow H^{1,0}(S_5)$ (respectivamente, $P^* : H^{1,0}(R_2) \rightarrow H^{1,0}(R_5)$) está definida en este caso por $P^*(w_1) = \eta_1 + \eta_4 + \eta_5$ y $P^*(w_2) = \eta_2 + \eta_3$. Usando la igualdad

$$4(u+v)i = \int_{\delta_1} \eta_1 + \eta_4 + \eta_5 = \int_{\delta_1} P^*w_1 = 2 \int_{\beta_1} w_1,$$

permite obtener la relación entre los coeficientes de las matrices de Riemann anteriores con los coeficientes de las matrices de Riemann de las superficies de género dos. De esta manera, ya que conocemos los coeficientes de las respectivas superficies de género dos en términos de p de la sección 9.3.2, tenemos de manera explícita relaciones, en términos de p , de los coeficientes u y v . \square

Variedades Hiperbólicas 3-Dimensionales

Este capítulo tiene por propósito mostrar algunos conceptos y resultados en el área de grupos Kleinianos espaciales (grupos discretos de isometrías del espacio hiperbólico) y *variedades hiperbólicas* 3-dimensionales. Se darán algunos ejemplos que permitan aclarar teoremas difíciles, aunque tales ejemplos son en si no muy fáciles. Hay muchos temas que no trataremos, por ejemplo, laminaciones geodésicas medibles, herramienta desarrollada y utilizada por W.P. Thurston [Thurston] para obtener gran parte de sus resultados en el problema de hiperbolización de variedades 3-dimensionales. Tampoco se incorpora la teoría de homeomorfismos casi-holomorfos, importante para entender las deformaciones de estructuras hiperbólicas. Así también la teoría ergódica en \widehat{C} de los grupos Kleinianos, clasificación, moduli, etc, tampoco han sido incluidas en este capítulo.

Diremos que una variedad 3-dimensional M tiene una estructura hiperbólica si existe un grupo discreto G de transformaciones de Möbius (isometrías de \mathbb{H}^3) tal que \mathbb{H}^3/G es homeomorfa a M ; en cuyo caso, la estructura hiperbólica es dada por G . Una variedad M junto a una estructura hiperbólica es llamada una *variedad hiperbólica*. Observemos que en este caso, $\pi_1(M) \cong G$. Puede ocurrir que el volumen hiperbólico sea finito o no.

Ahora veremos algunas propiedades que deben satisfacer las variedades hiperbólicas. El primer resultado sale directamente del hecho que los grupos de isometrías obtenidos por transformaciones de Möbius preservan la orientación, es decir, tenemos el siguiente.

Proposición 10.1. *Toda variedad hiperbólica es orientable.*

10.0.3. Variedades Hiperbólicas son Irreducibles. Una variedad 3-dimensional M es llamada una *variedad irreducible* si para toda incrustación

$$i : S^2 \rightarrow M,$$

donde S^2 es la esfera bidimensional unitaria, se puede extender a una incrustación $i : B^3 \rightarrow M$, donde B^3 es la bola 3-dimensional acotada por S^2 .

Ejemplo 10.1. La variedad $M = S^2 \times S^1$ no es irreducible

Proposición 10.2. *Toda variedad hiperbólica 3-dimensional es irreducible.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $M = \mathbb{H}^3/G$ una variedad hiperbólica. Denotemos por $P : \mathbb{H}^3 \rightarrow M$ el cubrimiento universal dado por G . Consideremos una incrustación $i : S^2 \rightarrow M$. Entonces se puede levantar esta incrustación a una incrustación $\widehat{i} : S^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ tal que $P\widehat{i} = i$. Usando el hecho que \mathbb{H}^3 es contractible, tenemos que $\widehat{i} : S^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ se puede extender a una incrustación $\widehat{i} : B^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$. Luego, usando $P\widehat{i} = i$ permite extender $i : S^2 \rightarrow M$ a una incrustación $i : B^3 \rightarrow M$. \square

Observación 10.1. Observemos que no toda variedad 3-dimensional irreducible es necesariamente hiperbólica. Por ejemplo, $M = S^1 \times S^1 \times S^1$ es irreducible con grupo fundamental isomorfo a $L = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Ya que no existe un grupo discreto de isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 isomorfo a L obtenemos que M no es hiperbólica.

10.1. Variedades Hiperbólicas son Atoroidales

Una variedad 3-dimensional compacta M se llama *atoroidal* si todo subgrupo de $\pi_1(M)$ isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ es conjugado a un subgrupo de $\pi_1(S)$ para alguna superficie $S \subset \partial M$.

Proposición 10.3. *Sea M una variedad compacta cuyo interior $\text{Int}(M)$ tiene una estructura hiperbólica 3-dimensional. Entonces M es atoroidal.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una variedad hiperbólica \mathbb{H}^3/G y supongamos que tenemos un subgrupo K de G isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. En este caso, K está generado por dos transformaciones parabólicas A y B que conmutan con el mismo punto fijo. Módulo conjugación, podemos suponer que $A(z) = z+1$ y $B(z) = z+\tau$, algún $\tau \in \mathbb{H}$. Además, podemos considerar $B = \{(z, t) \in \mathbb{H}^3 : t \geq 1\}$, el cual resulta precisamente invariante por K en G . Entonces, $B/K \cong \Delta^* \times S^1$, donde Δ^* denota el disco unitario abierto con el centro 0 eliminado. Luego, en M podemos quitar la proyección de B (la cual es exactamente B/K) para formar un borde S de M para el cual $\pi_1(S)$ es K . \square

Ejemplo 10.2.

- (1) Si $\partial M = \emptyset$, entonces M es atoroidal si y sólo si $\pi_1(M)$ no contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
- (2) $M = S^1 \times S^1 \times S^1$ es irreducible pero no es atoroidal.
- (3) $M = S^2 \times S^1$ es atoroidal, pero no es irreducible.

Corolario 10.4. *Si M es una variedad compacta cuyo interior tiene una estructura hiperbólica, entonces M debe ser orientable, atoroidal e irreducible.*

Existen variedades 3-dimensionales compactas, orientables, irreducibles y atoroidales cuyo interior no posee una estructura hiperbólica. A continuación procedemos a dar un ejemplo de esta situación. Para esto consideremos un homeomorfismo que revierte orientación

$$\sigma : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$$

de orden dos tal que $(S^1 \times S^1)/\sigma$ es la botella de Klein. Ahora construimos el homeomorfismo que preserva orientación de orden dos

$$\tau : (S^1 \times S^1) \times [-1, 1] \rightarrow (S^1 \times S^1) \times [-1, 1],$$

definido por

$$\tau(p, t) = (\sigma(p), -t),$$

donde $p \in S^1 \times S^1$ y $t \in [-1, 1]$.

Consideremos la variedad 3-dimensional orientable y compacta

$$M = ((S^1 \times S^1) \times [-1, 1])/\tau$$

Ejercicio 10.1. Verificar que:

- (1) $\partial M \cong S^1 \times S^1$;

(2) El interior de M es homeomorfa a \mathbb{R}^3/H , donde H es el grupo generado por

$$A(x, y, z) = (x + 1, y, z)$$

$$B(x, y, z) = (-x, y + 1, -z)$$

(3) Deducir de lo anterior que $\pi_1(M) = \langle A, B : ABA = B \rangle$.

Proposición 10.5. *El interior de la variedad M construida no tiene estructura hiperbólica.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el interior N de M posee estructura hiperbólica. Como tenemos un cubrimiento de grado dos

$$P : S^1 \times S^1 \times (-1, 1) \rightarrow N,$$

entonces debemos tener que $G = \pi_1(M) = \pi_1(N) < \mathbb{M}$ debe contener $L = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ como subgrupo de índice dos en G . En este caso,

$$\tau : S^1 \times S^1 \times (-1, 1) \rightarrow S^1 \times S^1 \times (-1, 1)$$

tiene un levantamiento $\hat{\tau} : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$, $\hat{\tau} \in G$ y $\hat{\tau}^2 \in L$. Más aún, G está generado por L y $\hat{\tau}$.

Si ocurre que $\hat{\tau}^2 = I$, entonces $\hat{\tau}$ debe tener un punto fijo en \mathbb{H}^3 , con lo cual tendríamos que N no es una variedad, es un orbifold con valores de ramificación.

Por otro lado, sabemos que L está generado por dos transformaciones parabólicas que conmutan y tienen el mismo punto fijo $q \in \hat{\mathbb{C}}$. Como $\hat{\tau}^2 \neq I$ y $\hat{\tau}^2 \in L$, tenemos necesariamente que $\hat{\tau}^2$ es parabólico con punto fijo q . Luego $\hat{\tau}$ también es parabólico con punto fijo q . Esto diría entonces que G es abeliano, una contradicción. \square

Observación 10.2. En el ejemplo anterior tenemos que $R = S^1 \times S^1 \times (-1, 1)$ posee una estructura hiperbólica (de volumen infinito), dada por el grupo K generado por $A(z, t) = (z + 1, t)$ y $B(z, t) = (z + i, t)$. Es importante notar que R tiene dos bordes naturales, uno es de volumen hiperbólico finito mientras que el otro es de volumen infinito. R es topológicamente la esfera 3-dimensional S^3 menos dos círculos entrelazados como se muestra en la figura 10.1. La razón de por qué $N = R/\tau$ no tiene estructura hiperbólica puede verse como el hecho que si esto ocurriese, entonces τ debería ser una isometría hiperbólica de R la cual permuta ambos bordes, lo cual contradice la finitud del volumen de uno de los bordes con el hecho que el otro borde es de volumen infinito.

La importancia del ejemplo anterior se ve reflejada en el siguiente resultado de Thurston [Thurston2]

Teorema 10.6. *Sea M una variedad 3-dimensional compacta, orientable, con $\partial M \neq \emptyset$ y no homeomorfa al ejemplo anterior. Entonces el interior de M posee una estructura hiperbólica si y sólo si M es irreducible y atoroidal.*

En el caso en que la variedad compacta M sea cerrada, es decir compacta y sin borde, necesitaremos de la siguiente propiedad debida a Waldhausen [Waldhausen]. Diremos que una variedad 3-dimensional compacta sin borde es *suficientemente grande* si existe una superficie orientable cerrada (compacta sin borde) S , no homeomorfa a la esfera, y una incrustación $i : S \rightarrow M$ tal que a nivel de grupos fundamentales $\pi_1(i) : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ es inyectiva.

Observación 10.3. Una variedad 3-dimensional compacta con borde es suficientemente grande. Un tipo de variedades de este tipo son las llamadas *variedades de Haken* que además son *variedades primas*, es decir, no pueden descomponerse en suma conexa de variedades no triviales.

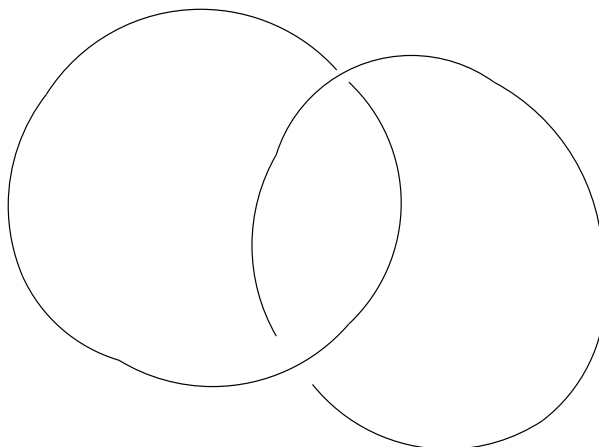


FIGURA 10.1

Teorema 10.7 ([Thurston2]). *Sea M una variedad 3-dimensional compacta, orientable, cerrada y suficientemente grande. Entonces M tiene una estructura hiperbólica si y sólo si M es irreducible y atoroidal.*

Una buena referencia sobre los teoremas de hiperbolización de Thurston es [Morgan]. En las próximas secciones miraremos algunos ejemplos de construcciones de variedades 3-dimensionales hiperbólicas.

También es de gran importancia la siguiente propiedad de rigidez que satisfacen las variedades hiperbólicas de dimensión tres con volumen finito, a diferencia de lo que sucede para superficies de Riemann. Decimos que un grupo discreto G de isometrías de \mathbb{H}^3 (es decir, un grupo discreto de transformaciones de Möbius) es un grupo de *volumen finito* si \mathbb{H}^3/G tiene volumen hiperbólico finito.

Teorema 10.8 (Teorema de Rigidez de Mostow). *Sean G_1 y G_2 dos grupos discretos, sin torsión y volumen finito de isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^n , $n \geq 3$. Entonces G_1 y G_2 son isomorfos como grupos abstractos si y sólo si son conjugados por una isometría.*

En el caso que tenemos un grupo discreto G de transformaciones de Möbius que tiene torsión, entonces \mathbb{H}^3 ya no resulta ser una variedad hiperbólica, aunque si es una variedad topológica. Esta es llamada una *orbifold hiperbólica*. De todas maneras, si G es finitamente generado, entonces el siguiente resultado de Selberg nos dice que la orbifold hiperbólica es cubierta por una variedad hiperbólica.

Teorema 10.9 (Lema de Selberg). *Sea G un grupo de transformaciones de Möbius que sea finitamente generado. Entonces existe un subgrupo normal de índice finito $K < G$ el cual no tiene torsión.*

10.2. Ejemplo 1: Complemento de Nudos

Un *nudo* en la esfera 3-dimensional S^3 es la imagen homeomorfa de un círculo en S^3 . Un nudo $K \subset S^3$ tal que el grupo fundamental de su complemento sea trivial es llamado un *nudo no anudado*. En caso contrario, decimos que este es un *nudo anudado*.

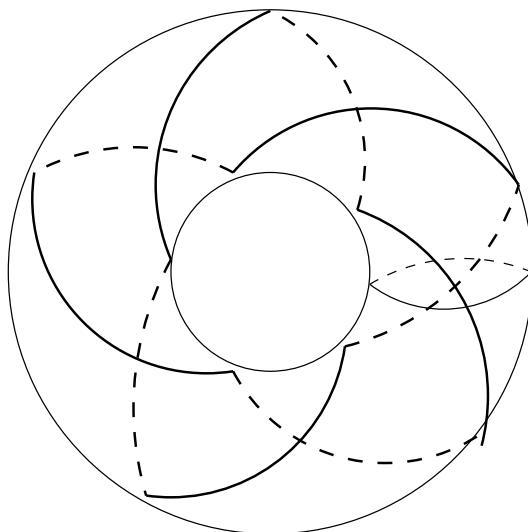


FIGURA 10.2

Dado un nudo $K \subset S^3$ uno puede considerar la variedad 3-dimensional M_K obtenida al eliminar una vecindad tubular abierta de K . Esta es una variedad compacta, irreducible, orientable con borde $\partial M_K \cong S^1 \times S^1$. La proposición 10.3 asegura que el interior de M_K admite una estructura hiperbólica si y sólo si M_K es atoroidal.

10.2.1. Nudos Toroidales. Un nudo $K \subset S^3$ anudado es llamado un *nudo toroidal* si existe un toro $T \cong S^1 \times S^1$ incrustado en S^3 el cual no es anudado (es decir, $S^3 - T$ consiste de dos variedades homeomorfas a $D^2 \times S^1$, donde $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$) tal que $K \subset T$ (en la figura 10.2 se muestra un nudo toroidal llamado la figura 8).

Ejercicio 10.2. Verificar que si K es un nudo toroidal, entonces M_K no es atoroidal. En particular, concluir que M_K no posee una estructura de variedad hiperbólica.

10.2.2. Nudos Satelitales. Un nudo $K \subset S^3$ es llamado un *nudo satelital* si existe un nudo no trivial $Q \subset S^3$, es decir $\pi_1(S^3 - Q) \cong \mathbb{Z}$, y existe una vecindad tubular V_Q para Q de manera que $K \subset V_Q$ y no exista una bola tres dimensional $B^3 \subset V_Q$ conteniendo K en su interior.

Ejercicio 10.3. Verificar que si K es un nudo satelital, entonces K es anudado y M_K no es atoroidal. Concluir que en este caso M_K no puede tener la estructura de una variedad hiperbólica.

10.2.3. Nudos No anudados. Si tomamos $K \subset S^3$ un nudo no anudado, entonces tenemos que M_K es homeomorfo a $\bar{D} \times S^1$, donde \bar{D} es el disco unitario cerrado y S^1 es el círculo unitario (es decir, M_K es un handlebody de género 1). En este caso, como el grupo fundamental de M_K es un grupo cíclico infinito, la única estructura hiperbólica que se le puede dar es por un grupo de Schottky de género 1, es decir, por el grupo cíclico generado por una transformación loxodrómica.

10.2.4. Hiperbolización de Nudos. El siguiente resultado de Thurston [Thurston] asegura que los únicos nudos para los cuales el interior de M_K no tiene estructura hiperbólica son los toroidales y satelitales.

Teorema 10.10. *Sea K un nudo en S^3 . Entonces el interior de M_K tiene estructura hiperbólica si y sólo si K no es toroidal ni satelital.*

Observación 10.4. Si M_K tiene interior con estructura hiperbólica y K es anudado, entonces $\text{Vol}(\text{Int}(M_K)) < \infty$. En efecto, el borde de M_K es homeomorfo a $S^1 \times S^1$, luego debe ser uniformizado por un subgrupo discreto isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ó a \mathbb{Z} (este último generado por un loxodrómico). Ya que K es no anudado, tenemos que M_K no es un handlebody de género 1, luego el borde de M_K sólo puede ser uniformizado por $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (un grupo generado por dos translaciones en direcciones \mathbb{R} -linealmente independientes).

El programa *Snappea* de J. Weeks permite dibujar nudos y entrelazados (links) en la esfera S^3 y determinar si su complemento admite o no una estructura de variedad hiperbólica. Además este entrega su volumen hiperbólico, su homología, una representación matricial de su grupo fundamental como transformaciones de Möbius, dominios fundamentales, etc..

10.3. Ejemplo2: Fibrados sobre S^1

Consideremos una superficie S compacta, orientable con posible borde ∂S y sea $f : S \rightarrow S$ un homeomorfismo de S que preserve la orientación. Podemos construir una variedad 3-dimensional compacta orientable

$$M_f(S) = S \times [0, 1] / \sim,$$

donde $(x, 0) \sim (f(x), 1)$, la cual es un *fibrado sobre S^1* .

Ejercicio 10.4.

- (i) Verificar que $\partial M_f(S) \neq \emptyset$ si y sólo si $\partial S \neq \emptyset$. En tal caso, $\partial M_f(S)$ es unión de toros.
- (ii) Sean $f, g : S \rightarrow S$ homeomorfismos que preservan orientación y que son homotópicos. Probar que $M_f(S)$ y $M_g(S)$ son variedades homeomorfas.

El grupo fundamental de $M_f(S)$ es la HNN-extensión del grupo fundamental de $S \times [0, 1]$ extendido por f . De manera más precisa; podemos suponer que $f(p) = p$ algún $p \in S$, homotopando f si es necesario. Supongamos que S es una superficie compacta de género $g \geq 1$ con k bordes. En este caso,

$$\pi_1(S, p) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g, \delta_1, \dots, \delta_k : \prod_{j=1}^g [\alpha_j, \beta_j] \prod_{l=1}^k \delta_l = 1 \rangle,$$

donde $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

Si consideramos un arco simple orientado $\delta \subset S \times [0, 1]$ partiendo desde $(p, 0)$ y terminando en $(p, 1)$, entonces

$$\pi_1(M_f(S), [(p, 0)]) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g, \delta_1, \dots, \delta_k, \delta :$$

$$\prod_{j=1}^g [\alpha_j, \beta_j] \prod_{l=1}^k \delta_l = 1, f_*(\alpha_j) = \delta^{-1} \alpha_j \delta, f_*(\beta_j) = \delta^{-1} \beta_j \delta, f_*(\delta_l) = \delta^{-1} \delta_l \delta \rangle$$

Luego, si el interior de $M_f(S)$ tiene estructura hiperbólica, entonces existe un grupo Kleiniano G isomorfo al grupo anterior tal que el interior de $M_f(S)$ es homeomorfo a \mathbb{H}^3/G

10.3.1. Característica No Negativa. Supongamos que la característica de Euler de S es mayor o igual a cero. En tal caso, las posibilidades para S son, módulo homeomorfismos, las siguientes:

- (i) S^2 ;
- (ii) $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$;
- (iii) $A = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$;
- (iv) $S^1 \times S^1$.

Si $S = S^2$, entonces todo homeomorfismo que preserva orientación $f : S \rightarrow S$ debe ser homotópico a la identidad. Luego tenemos que $M_f(S) \cong S^2 \times S^1$. Esta variedad no es irreducible y, en particular, no posee una estructura hiperbólica.

Cuando $S = \overline{D}$, todo homeomorfismo $f : S \rightarrow S$, que preserva orientación, es homotópico a la identidad. Entonces tenemos que $M_f(S) \cong \overline{D} \times S^1$. El interior posee estructura hiperbólica dada por cualquier grupo de Schottky anodado de género uno. Es importante notar que no existe estructura hiperbólica de volumen finito ¿Por qué?

En el caso $S = A$ tenemos dos posibilidades, dependiendo si f permuta o no ambos bordes del anillo A :

- (a) Supongamos que f preserva cada lado de A . En tal caso $M_f(S) \cong S^3 - K$, donde K es el entrelazado dado en figura 10.1. El grupo fundamental de esta variedad es isomorfo a $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. Este caso tienen una estructura hiperbólica de dimensión infinita, dado por el grupo $K = \langle A, B \rangle$, donde A y B son parabólicos con el mismo punto fijo ∞ trasladando en direcciones linealmente independientes. Como todo subgrupo discreto de isometrías de \mathbb{H}^3 isomorfo a $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ es conjugado a uno del tipo antes descrito, tenemos que no es posible encontrar una estructura hiperbólica de volumen finito.
- (b) Supongamos ahora que f permuta los dos lados de A . Luego existe una curva simple cerrada γ contenida en el interior de A que separa ambos lados de A y que resulta ser invariante por f . Luego $\gamma \times [0, 1]$ define en $M_f(S)$ un toro que no es homotópico al borde de $M_f(S)$ (que resulta ser un toro). Así, obtenemos una variedad que no es homotópicamente atoroidal, luego, no tiene estructura hiperbólica.

En el último caso, si $S = S^1 \times S^1$ y $f : S \rightarrow S$ es un homeomorfismo que preserva orientación, entonces $M_f(S)$ contendrá incrustada una copia de S , la cual no es homotópica a un borde de $M_f(S)$ por la simple razón que esta es cerrada. Luego $M_f(S)$ resulta no ser homotópicamente atoroidal y, en particular, no posee una estructura hiperbólica.

10.3.2. Característica Negativa. En el caso que S tiene característica de Euler negativa, entonces $M_f(S)$ resulta ser irreducible. La razón de esto es que el cubrimiento universal de $M_f(S) \cong \mathbb{R}^3$ es contractible. En efecto, supongamos que $S = \mathbb{H}/F$, donde \mathbb{H} es el plano hiperbólico y F es un grupo Fuchsiano que uniformiza S . Denotemos por $\pi : \mathbb{H} \rightarrow S$ el cubrimiento universal inducido por F . Entonces el homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ se levantaría por π a un homeomorfismo $\hat{f} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$. Ahora, consideremos el espacio $\mathcal{W} = \mathbb{H} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ y el grupo L de homeomorfismos de \mathcal{W} generado por las transformaciones $A_\gamma(z, t) = (\gamma(z), t)$, para $\gamma \in F$ y $B(z, t) = (\hat{f}(z), t + 1)$.

Ejercicio 10.5.

- (i) Verificar que L es un grupo de homeomorfismos de \mathcal{W} que actúa de manera propiamente discontinua y sin puntos fijos en todo \mathcal{W} . Más aún, \mathcal{W}/L es homeomorfo a $M_f(S)$.
- (ii) Ver que $M_f(S)$ no puede ser homeomorfo a la variedad dada de la proposición 10.6

Ahora que sabemos que $M_f(S)$ es irreducible y no homeomorfo al caso excluido en el teorema 10.6 tenemos como consecuencia de los teoremas de hiperbolización de Thurston 10.6 y 10.7 el siguiente.

Proposición 10.11. *Sea S una superficie de característica de Euler negativa. El interior de $M_f(S)$ admite estructura hiperbólica si y sólo si $M_f(S)$ es atoroidal.*

La propiedad de ser o no atoroidal la variedad $M_f(S)$ será consecuencia del (tipo de homotopía) del homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ considerado. Primero, enunciaremos la clasificación de los homeomorfismos dada por Thurston. Consideremos un homeomorfismo $f : S \rightarrow S$.

- (1) Si f es homotópico a un homeomorfismo de orden finito, entonces decimos que este es un *homeomorfismo periódico*.
- (2) Si f es homotópica a un homeomorfismo para el cual existe una colección de curvas cerradas simples, dos a dos disjuntas, ninguna de ellas homotópicamente trivial ni homotópica a un borde de S , que es invariante por la acción de tal homeomorfismo, entonces decimos que f es un *homeomorfismo reducible*.
- (3) Si f no es de ninguno de los dos tipos anteriores, entonces decimos que es un *homeomorfismo pseudo-Anosov*.

Supongamos que $f : S \rightarrow S$ es periódico. Podemos entonces suponer que f es de orden finito, digamos N . Consideremos una curva simple cerrada $\alpha \subset S$ que no sea homotópicamente trivial ni sea homotópica a un borde de S . Sean $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = f(\alpha)$, ..., $\alpha_k = f^k(\alpha)$, tal que $f(\alpha_k) = \alpha$. Consideremos los cilindros $C_1 = \alpha_0 \times [0, 1]$, ..., $C_k = \alpha_k \times [0, 1]$ en $S \times [0, 1]$. Estos cilindros se proyectan en toros dentro de $M_f(S)$, obteniendo en este caso que $M_f(S)$ no es atoroidal.

Supongamos ahora que $f : S \rightarrow S$ es reducible. Podemos suponer que f deja invariante una colección de curvas cerradas simples, dos a dos disjuntas, ninguna de ellas homotópicamente trivial ni homotópica a un borde de S . En este caso podemos escoger una curva α dentro de tal colección y podemos proceder como en el caso anterior para ver que $M_f(S)$ no es atoroidal.

Tenemos el siguiente resultado de Thurston, cuya demostración también puede encontrarse en [Otal], el cual dice que $M_f(S)$ es atoroidal si f es pseudo-Anosov. Así, los teoremas de hiperbolización de Thurston 10.6 y 10.7 dan el siguiente.

Teorema 10.12. *Sea S una superficie compacta orientable de característica de Euler negativa y sea $f : S \rightarrow S$ un homeomorfismo que preserva orientación. Entonces el interior de $M_f(S)$ admite una estructura de variedad hiperbólica si y sólo si f es pseudo-Anosov.*

Por lo anterior, el problema de hiperbolización del interior de $M_f(S)$ se puede mirar como el problema de decidir cuando el homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ es o no un homeomorfismo pseudo-Anosov. Como esta propiedad es un invariante homotópico, podemos suponer que existe $p \in S$ tal que $f(p) = p$. De esta manera tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(S, p) & \xrightarrow{\pi_1(f)} & \pi_1(S, p) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbb{H}_1(S, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathbb{H}_1(f)} & \mathbb{H}_1(S, \mathbb{Z}) & & \end{array}$$

Si nos damos una base de $\mathbb{H}_1(S, \mathbb{Z})$, entonces $\mathbb{H}_1(f)$ queda representada por una matriz en $\text{SL}(r, \mathbb{Z})$, donde

$$r = \text{rango de } \mathbb{H}_1(S, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 2g, & \text{si } S \text{ es superficie compacta} \\ & \text{cerrada de género } g; \\ 2g + k - 1, & \text{si } S \text{ es superficie compacta} \\ & \text{de género } g \text{ y } k \text{ bordes.} \end{cases}$$

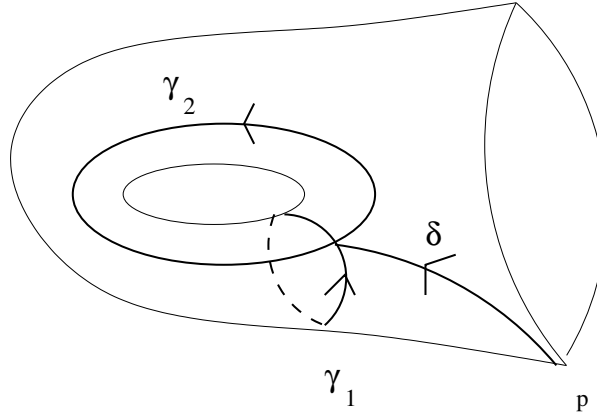


FIGURA 10.3

Esta matriz $H_1(f)$ es llamada la *monodromía de Anosov* del homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ correspondiente a la base escogida de homología. Un cambio de base de homología induce una conjugación de la matriz $H_1(f)$ por una matriz en $SL(r, \mathbb{Z})$, en particular, el polinomio característico $P_f(t) = \text{Det}[H_1(f) - tI] \in \mathbb{Z}[t]$ se mantiene invariante.

Por ejemplo: (i) si $f : S \rightarrow S$ es periódico de período N , entonces $Q(t) = t^N - 1$ debe ser divisible por $P_f(t)$. En particular, $P_f(t)$ tiene como ceros algunas de las raíces de la unidad; (ii) si existe una curva α cerrada simple homológicamente no trivial en S tal que $f^k(\alpha) = \alpha$ (igualdad en el sentido de homología) para algún $k > 0$, entonces $P_f(t)$ tiene un cero que es raíz de la unidad. En resumen;

Proposición 10.13. *Sea $f : S \rightarrow S$ un homeomorfismo de S que preserva orientación cuyo polinomio característico $P_f(t)$ no tiene raíces de la unidad como ceros, entonces:*

- (a) *f no puede ser periódico;*
- (b) *si f es reducible, entonces cualquier colección de curvas invariante por f debe consistir sólo de curvas que son homológicamente triviales.*

Observación 10.5. Es importante notar que al mirar sólo la acción del homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ a nivel de la homología, no tenemos información sobre la acción de f sobre las curvas que son homológicamente triviales. Es por esta razón que en la proposición anterior no podemos desechar la posibilidad que f sea o no reducible.

10.3.2.1. Un Ejemplo de H. Helling: Género Uno y un Borde. Para tener una mejor visión de este ejemplo, recomendamos leer los trabajos de H. Helling, P. Alestalo y C. Menzel [**Alestalo-Helling**] [**Helling-Menzel**].

Sea S una superficie compacta de género uno con un borde y $f : S \rightarrow S$ un homeomorfismo que preserva orientación. Módulo homotopía, podemos asumir que f es la identidad cerca del borde. Sea $p \in \partial S$ y sean las curvas orientadas simples γ_1, γ_2 y el arco orientado δ como se muestran en la figura 10.3.

Si $\alpha = \delta \cdot \gamma_1 \cdot \delta^{-1}$ y $\beta = \delta \cdot \gamma_2 \cdot \delta^{-1}$, entonces

$$\pi_1(S, p) = \langle \alpha, \beta \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

$$H_1(S, \mathbb{Z}) = \langle \hat{\alpha}, \hat{\beta} : [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] = 1 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

La curva frontera es dada por $\lambda = \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha$.

Usando esta base de homología para S , obtenemos la monodromía de Anosov para f

$$H_1(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$$

En este caso, el polinomio característico de f es dado por

$$P_f(t) = t^2 - (a + d)t + 1$$

Respecto a los ceros de $P_f(t)$ tenemos el siguiente:

- (1) Si $(a + d)^2 > 4$, entonces los ceros de $P_f(t)$ viven en $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$;
- (2) Si $(a + d)^2 = 4$, entonces los ceros de $P_f(t)$ viven en $\{\pm 1\}$;
- (3) Si $(a + d)^2 < 4$, entonces los ceros de $P_f(t)$ viven en $\{\pm i, \frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}\}$.

Habíamos observado que:

- (a) si f es periódico, entonces $P_f(t)$ debe tener como cero alguna raíz de la unidad, es decir, $-2 \leq a + d \leq 2$;
- (b) Si f es reducible, y usando el hecho que no hay curvas simples cerradas homológicamente triviales que no sean homotópicamente triviales (o homotópicas al borde) en este tipo de superficie S , entonces de nuevo debemos tener $-2 \leq a + d \leq 2$.

Luego, si $(a + d)^2 > 4$, es decir la matriz $H_1(f)$ es hiperbólica, entonces f es pseudo-Anosov. H. Helling ha observado que el recíproco es válido:

Teorema 10.14. *Sea $f : S \rightarrow S$ un homeomorfismo que preserva orientación de una superficie S de género uno con un borde. Entonces f es pseudo-Anosov si y sólo si $H_1(f)$ es hiperbólica.*

10.3.2.2. Caso de superficies cerradas. Para esta subsección nos basaremos en [Casson-Bleiler]. Supongamos que la superficie S considerada es cerrada de género $g \geq 2$ y $f : S \rightarrow S$ un homeomorfismo que preserva la orientación. Sabemos que si el polinomio característico $P_f(t)$ no tiene raíces de la unidad como ceros, entonces proposición 10.13., asegura que f puede ser de uno de los siguientes tipos:

- (1) Pseudo-Anosov;
- (2) Reducible de orden infinito con un sistema invariante de curvas cerradas, simples, homológicamente triviales, homotópicamente no triviales y disjuntas dos a dos.

Supongamos que tenemos el caso (2). En esta situación tenemos la existencia de una colección \mathcal{F} finita de curvas cerradas, simples, disjuntas dos a dos, homológicamente triviales pero homotópicamente no triviales, que es invariante por f . Podemos suponer que α_1 es una de esas curvas y que esta divide S en dos superficies, una de las cuales denotaremos por S_1 con la propiedad que S_1 es disjunta de las otras curvas cerradas en \mathcal{F} .

Denotemos por $\alpha_2 = f(\alpha_1)$, $\alpha_3 = f(\alpha_2), \dots, \alpha_r = f(\alpha_{r-1})$ tal que $f(\alpha_r) = \alpha_1$. De esta manera, obtenemos también la sucesión finita de superficies $S_1, S_2 = f(S_1), \dots, S_r = f(S_{r-1})$ y tal que $f(S_r) = S_1$. Sean

$$R = S - \bigcup_{j=1}^r S_j; \text{ y } \bar{R} = R \cup \{\text{discos pegados en cada borde de } R\}$$

Entonces

$$H_1(S, \mathbb{Z}) = H_1(S_1, \mathbb{Z}) \oplus \dots \oplus H_1(S_r, \mathbb{Z}) \oplus H_1(\bar{R}, \mathbb{Z}).$$

Luego podemos construir una base para $H_1(S, \mathbb{Z})$ de la manera siguiente. Primero, construimos una base para $H_1(S_1, \mathbb{Z})$ y la trasladamos por f para obtener una base para cada $H_1(S_j, \mathbb{Z})$, $j = 2, \dots, r - 1$. Segundo, construimos una base para $H_1(\bar{R}, \mathbb{Z})$. La unión de todas esas bases da una base para $H_1(S, \mathbb{Z})$. La monodromía de Anosov para f en tal base queda de la forma:

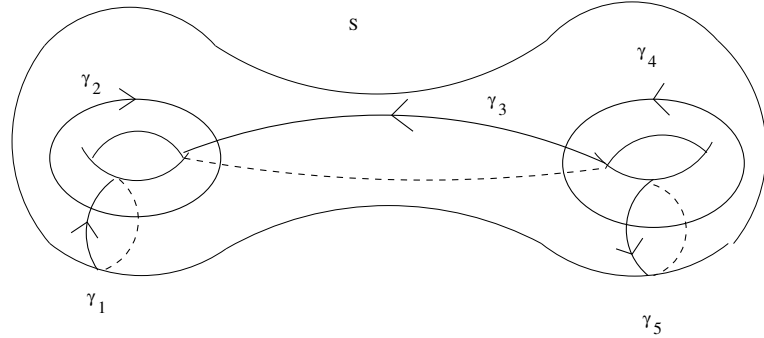


FIGURA 10.4

$$H_1(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & A & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & C & 0 & 0 \\ I & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & B & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & I & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & E & F \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & G & H \end{pmatrix}$$

Luego $P_f(t) = M(t^r)N(t)$, donde $N(t)$ es el polinomio característico de f restringido a \bar{R} . En particular se obtiene el siguiente:

Teorema 10.15 ([Casson-Bleiler]). *Sea S una superficie orientable cerrada de género $g \geq 2$ y $f : S \rightarrow S$ un homeomorfismo que preserva la orientación. Entonces f es pseudo-Anosov si:*

- (i) $P_f(t)$ no tiene raíces de la unidad como ceros;
- (ii) $P_f(t)$ es un polinomio irreducible en $\mathbb{Z}[t]$; y
- (iii) $P_f(t) \notin \mathbb{Z}[t^r]$, para ningún $r \in \{2, 3, 4, \dots\}$.

El siguiente ejemplo es tomado también del libro [Casson-Bleiler]. Sea S una superficie de género dos y considere las curvas $\gamma_1, \dots, \gamma_5$ como se muestra en la figura 10.4.

Denotemos por $f_j : S \rightarrow S$ el Dehn twist a lo largo de la curva γ_j , $j = 1, \dots, 5$.

Usando como base para $H_1(S, \mathbb{Z})$ las curvas $\alpha_1 = \gamma_1$, $\alpha_2 = \gamma_5$, $\beta_1 = \gamma_2$ y $\beta_2 = \gamma_4$, las monodromías de Anosov quedan dadas por las matrices:

$$H_1(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad H_1(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

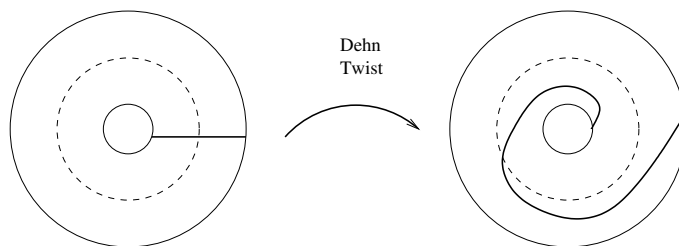


FIGURA 10.5

$$H_1(f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad H_1(f_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$H_1(f_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomando $f = f_1 f_3 f_5^2 f_2^{-1} f_4^{-1}$, se obtiene que $P_f(t) = t^4 - 9t^3 + 21t^2 - 9t + 1$, el cual es irreducible en $\mathbb{Z}[t]$, no tiene ceros que sean raíz de la unidad y $P_f(t) \notin \mathbb{Z}[t^r]$ para $r \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Luego, el teorema 10.15., asegura que $Mf(S)$ posee una estructura hiperbólica.

10.4. Ejemplo 3: Handlebodies

Para $g \geq 1$ consideremos la variedad orientable compacta

$$M_g = \underbrace{\overline{D} \times S^1 \# \dots \# \overline{D} \times S^1}_{g \text{ veces}}$$

donde \overline{D} denota el disco unitario cerrado. La variedad M_g es llamada un *handlebody de género g* .

Ejercicio 10.6. Verificar que M_g es irreducible y atoroidal y no homeomorfa a la variedad de la proposición 10.5. Concluir que el interior de M_g posee una estructura hiperbólica.

Una estructura hiperbólica sobre el interior de M_g corresponde a un grupo discreto $G \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{g \text{ veces}}$.

Puede ocurrir que G sea o no sea un grupo Kleiniano, es decir, $\Omega(G)$ puede ser vacío. Respecto a lo anterior, no es claro que todos los grupos discretos isomorfos al grupo fundamental de un handlebody aparezcan como estructura hiperbólica:

Conjetura 10.16. Sea $G \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{g \text{ veces}}$ un grupo discreto. Entonces \mathbb{H}^3/G es homeomorfo al interior del Handlebody M_g .

Respecto a lo anterior, si G es un grupo de Schottky anodado de género g , entonces la conjetura anterior vale.

Ejercicio 10.7. Verificar que si G es un grupo de Schottky de género $g \geq 1$, entonces la conjetura es verdad.

10.5. Ejemplo 4: Grupos CasiFuchsianos

Sea S una superficie orientable cerrada compacta con característica de Euler negativa. Entonces podemos mirar la variedad compacta $M(S) = S \times [0, 1]$ (mirar el ejemplo 2: Fibrados sobre S^1). Entonces es claro que $M(S)$ es una variedad compacta, irreducible y atoroidal, la cual no puede ser homeomorfa a la variedad de la proposición 10.5. Luego, el interior de $M(S)$ posee una estructura hiperbólica. Por ejemplo, consideremos un grupo fuchsiano F actuando sobre el semiplano de Poincaré \mathbb{H} tal que \mathbb{H}/F uniformiza el interior de S . Entonces \mathbb{H}^3/F es una variedad hiperbólica homeomorfa al interior de $M(S)$. Lo mismo se puede hacer reemplazando F por un grupo casifuchsiano (es decir, un grupo de transformaciones de Möbius que deja invariante una curva de Jordan Γ). El siguiente resultado de B. Maskit [Maskit5]

Teorema 10.17. *Si G es un grupo discreto isomorfo al grupo fundamental de una superficie de Riemann de género g tal que $\Omega(G) \neq \emptyset$ (es decir, un grupo Kleiniano) tal que todo elemento de G , diferente de la identidad, es loxodrómico, entonces $\Lambda(G)$ es una curva de Jordan y cada disco acotado por esta curva es invariante por G (es decir, G es casifuchsiano).*

Bibliografía

- [Abikoff] W. Abikoff. *The real analytic theory of Teichmüller spaces*. Lecture Notes in Math. **820**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1980)
- [Alestalo-Helling] P. Alestalo and H. Helling. *On torus fibrations over the circle*. SFB-Preprint Ergänzungsreihe 97-005, Bielefeld, 1997.
- [Alling-Greenleaf] N.L. Alling and N. Greenleaf, *Foundations of the theory of Klein surfaces*, Lecture Notes in Math. **219**, Springer-Verlag (1971).
- [Beardon] A.F. Beardon. *The geometry of discrete groups*. Graduate Texts in Math. **91**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1983)
- [Benedetti-Petronio] R. benedetti and C. Petronio. *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Universitext, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1992).
- [Bers] L. Bers. *Automorphic forms for Schottky groups*. Adv. in Math. **16** (1975), 332-361.
- [Burnside] W. Burnside. *On a class of automorphic functions*. Acta Mathematica Vol XXIII **433** (1981), 49-88.
- [Casson-Bleiler] A.J. Casson and S.A. Bleiler. *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*. Cambridge University Press, 1988.
- [Chuckrow] V. Chuckrow. *On Schottky groups with applications to Kleinian groups*. Annals of Math., **88** (1968), 47-61.
- [Ford] L.R. Ford. *Automorphic functions*. Chelsea, New York (1951).
- [Jørgensen] T. Jørgensen. *On discrete groups of Möbius transformations*. Amer. J. Math. **98** (1976), 739-749.
- [Koebe] P. Koebe. *Über die Uniformisierung der Algebraischen Kurven II*. Math. Ann. **69** (1910), 1-81.
- [Farkas-Kra] H. Farkas and I. Kra. *Riemann Surfaces*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [Gabino] G. González-Díez. *Loci of curves which are prime Galois coverings of \mathbb{P}^1* . Proc. London Math. Soc. **62** (1991), 469-489.
- [Helling-Menzel] H. Helling and C. Menzel. *Towards an algorithmic construction of the hyperbolic structure on surface bundles*. SFB-Preprint Ergänzungsreihe 99-074, Bielefeld, 1999.
- [Hidalgo1] R.A. Hidalgo. *Noded function groups*. Contemporary Mathematics. **240**(1999), 209-222.
- [Hidalgo2] R.A. Hidalgo. *A note on the homology covering of analytically finite Klein surfaces*. Complex variables **42** (2000), 183-192.
- [Hidalgo3] R.A. Hidalgo. *On Schottky groups with automorphisms*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Mathematica **19** (1994), 259-289.
- [Hidalgo4] R.A. Hidalgo. *Schottky uniformizations of closed Riemann surfaces with Abelian groups of conformal automorphisms*. Glasgow Math. J. **36** (1994), 17-32.
- [Hidalgo5] R.A. Hidalgo. *Dihedral groups are of Schottky type*. Revista Proyecciones. **18** (1999), 23-48.
- [Hidalgo6] R.A. Hidalgo. *\mathcal{A}_4 , \mathcal{A}_5 and S_4 of Schottky type*. Revista Matemática Complutense **15** (2002), 11-29.
- [Costa-Hidalgo] R.A. Hidalgo and A.F. Costa, A.F. *Anticonformal automorphisms and Schottky coverings*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **26** (2001), 489-508.
- [Matsuzaki-Taniguchi] K. Matsuzaki and M. Taniguchi. *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups*. Oxford Mathematical Monographs, 1998.
- [Maskit1] B. Maskit. *Kleinian Groups*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.
- [Maskit2] B. Maskit. *The homology covering of a Riemann surface*. Tôhoku Math. J. **38** (1986), 561-562.
- [Maskit3] B. Maskit. *Special uniformizations of symmetric Riemann surfaces*. Preprint
- [Maskit4] B. Maskit. *On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups II*. Ann. of Math. **91** (1970), 607-639.
- [Maskit5] B. Maskit. *On a class of Kleinian groups*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. **442** (1969), 1-8.
- [May] C.L. May. *A bound for the number of automorphisms of a compact Klein surface with boundary*. Proc. Amer. Math. Soc. **63** (1977), 273-280.
- [Morgan] J.W. Morgan. *On Thurston's uniformization theorem for three-dimensional manifolds*. The Smith conjecture, edited by H. Bass and J.W. Morgan, Academic Press (1984), 37-125.

- [Mumford] D. Mumford. *Tata lectures on Theta II*. Progress on Mathematics **43**, Birkhäuser, Boston, 1984.
- [Otal] J.P. Otal. *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*. Astérisque **235**, 1996.
- [Ractliffe] J.G. Ractliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Graduate Texts in Math. **149**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1994).
- [Gonzalez-Rodriguez] R.E. Rodríguez, V. González-Aguilera. *Fermat's quartic curve, Klein's curve and the Tetrahedron*. Contemp. Math. **201** (1997), 43-62.
- [Thurston] W.P. Thurston. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. Lecture Notes, Princeton Univ., 1979.
- [Thurston2] W.P. Thurston. *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*. Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 357-381.
- [Vermeulen] L. Vermeulen. *Non-hyperelliptic curves of genus three with Weierstrass points of weight two*. Report 81-01, Department of Math. University of Amsterdam, 1981.
- [Waldhausen] F. Waldhausen. *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*. Ann. of Math. **87** (1968), 56-88.

Índice alfabético

- $\Omega(G)/G$, 66
- ∂X , 43

- analíticamente finita, 95
- atlas analítico, 43
- atlas dianalítico, 43
- atoroidal, 136
- automorfismo dianalítico, 46
- automorfismos analíticos, 46
- automorfismos antianalíticos, 46
- automorfismos antiholomorfos, 46
- automorfismos holomorfos, 46

- B-Grupos, 59
- base simpléctica, 15, 83, 105

- círculo isométrico, 51
- complemento ortogonal, 23
- conjunto límite, 55
- cubrimiento dianalítico, 67
- cubrimiento homológico, 95

- Derivada Schwarziana, 49
- divisible, 7
- dominio de Dirichlet, 77
- dominio fundamental, 74

- $\text{End}(T_1)$, 5
- endomorfismo, 5
- esfera de Riemann, 44
- espacio hiperbólico, 59
- estabilizador, 55
- Extensión de Poincaré, 61

- Fibrado sobre S^1 , 141
- forma de Weil de una polarización, 17

- generadores de Schottky, 101
- Geodésica, 62
- grupo de isometrías de \mathbb{H}^3 , 62
- grupo de Schottky, 59, 101
- grupo de tipo Schottky, 103
- Grupo discreto, 53
- grupo elemental, 71
- grupo extendido simpléctico, 105
- grupo Kleiniano planar, 55

- grupo no-elemental, 71
- Grupos de Schottky Anodados, 59
- Grupos de Volumen finito, 139
- Grupos Fuchsianos, 58
- Grupos Uniformizantes, 59

- Handlebody, 149
- $\text{Hom}(T_1, T_2)$, 5
 - representación analítica, 5
 - representación racional, 5
- homeomorfismo holomorfo, 44
- Homeomorfismo periódico, 143
- Homeomorfismo pseudo-Anosov, 143
- Homeomorfismo reducible, 143
- homomorfismo, 4
 - dual, 9
 - entre variedades abelianas polarizadas, 15

- isogenia, 7
 - exponente de, 7
 - grado de, 7
- isometría de \mathbb{H}^3 , 62

- Jacobiana, 84

- $K(\lambda_H) = K(H) = K(E)$, 13

- $L(\lambda_H) = L(H) = L(E)$, 13
- $\lambda_H = \lambda_E$, 13
- $\lambda_{\hat{T}}$, 16

- métrica esférica, 44
- Matriz de Riemann, 84
- matriz período, 3
- Monodromía de Anosov, 144

- norma de grupo, 31
- n_T : multiplicación por un entero, 5
- nudo, 139
- Nudo anudado, 139
- Nudo no anudado, 139
- Nudo satelital, 140
- Nudo toroidal, 140

- Orbifold hiperbólica, 139
- orbifolds de Klein, 94

- $\phi_H = \phi_E$, 13
- polarización, 14
 - exponente de, 16
 - inducida, 14
 - principal, 16
 - tipo de, 15
- Polihedro, 77
- Polihedro Fundamental, 77
- proyección estereográfica, 44
- Punto de discontinuidad, 55
- punto límite, 55

- razón cruzada, 50
- reflexión, 49
- reflexión maximal, 111
- región de discontinuidad, 55
- Región de Ford, 75
- reticulado, 3

- signatura, 95
- sistema fundamental de curvas, 101
- Snappea, 141
- subtoro, 6
- subvariedad abeliana, 16
- subvariedades abelianas complementarias, 21
- superficie de Klein, 43
- superficie de Riemann, 43
- superficie maximal simétrica, 111
- superficies de Riemann hiperbólicas, 66

- $T[n]$: puntos de orden n , 6
- Teorema de Reducibilidad Completa de Poincaré, 22
- Teorema de Reducibilidad de Poincaré, 20
- Teorema de Retrosección de Koebe, 102
- Teorema de Uniformización, 66
- toro dual, 9
- toros analíticos, 3
- transformación de Möbius, 47
- transformación elíptica, 48
- transformación extendida de Möbius, 47
- transformación hiperbólica, 48
- transformación loxodrómica, 48
- transformación parabólica, 48
- transformación pseudo-elíptica, 49
- transformación pseudo-loxodrómica, 49
- transformación pseudo-parabólica, 49
- translación, 4

- v.a.: variedad abeliana, 14
- v.a.p., 14
- v.a.p.p., 16
- variedad abeliana, 14
 - simple, 22
- variedad abeliana polarizada, 14
 - exponente de, 16
- variedad abeliana principalmente polarizada, 16
- Variedad de Prym, 86
- Variedad Hiperbólica, 135
- Variedad Irreducible, 135
- Variedad suficientemente grande, 138
- Variedades de Haken, 139
- variedades hiperbólicas, 135
- Variedades primas, 139