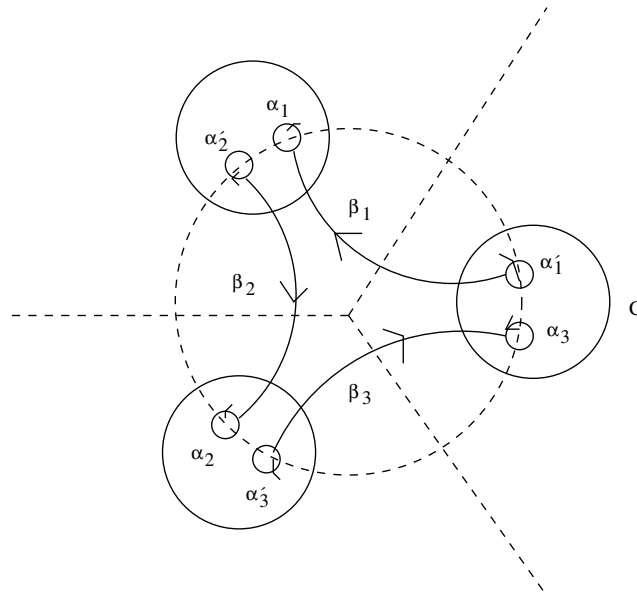




UNIVERSIDAD
DE LA FRONTERA

NOTAS INTRODUCTORIAS ANALISIS I

Rubén A. Hidalgo



Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de La Frontera
Casilla 54-D, 4780000 Temuco
Chile

E-mail address: ruben.hidalgo@ufrontera.cl

Apunte preliminar para la signatura de Análisis I.

Rubén A. Hidalgo
Departamento de Matemáticas y Estadística
UFRO

Índice general

Capítulo 1. FUNCIONES	7
1.1. Funciones	7
1.2. Gráfico de Funciones	8
1.3. Funciones Coordenadas	9
1.4. Superficies de Nivel	10
Capítulo 2. EL ESPACIO EUCLIDIANO \mathbb{R}^n	15
2.1. Espacios Vectoriales Reales	15
2.2. Subespacios Vectoriales	15
2.3. Combinaciones Lineales	16
2.4. Conjuntos Linealmente Independientes	17
2.5. Bases y Dimensión	17
2.6. El Espacio Vectorial \mathbb{R}^n	18
2.7. Transformaciones Lineales	18
2.8. Vectores y Valores Propios	20
2.9. Matrices Asociadas a Transformaciones Lineales	21
2.10. El Espacio Euclidiano \mathbb{R}^n	23
2.11. El Espacio Topológico \mathbb{R}^n	25
2.12. Isometrías Euclidianas	26
Capítulo 3. LIMITES Y FUNCIONES CONTINUAS	31
3.1. Puntos límites	31
3.2. Límite	31
3.3. Propiedades de Límites	32
3.4. Continuidad	35
3.5. Propiedades de Funciones Continuas	35
Capítulo 4. FUNCIONES DIFERENCIABLES	39
4.1. Funciones Diferenciables	39
4.2. Continuidad Asegurada por Diferenciabilidad	40
4.3. Derivadas Parciales y Direccionales	42
4.4. Situación Vectorial	43
4.5. Pregunta natural	43
4.6. Jacobianas, Gradientes	44
4.7. Propiedades de funciones diferenciables	47
4.8. Derivadas Parciales de Orden Superior	51
4.9. Valores Regulares y Críticos	53
4.10. Planos Tangentes, Normales	54
4.11. Propiedad Geométrica del Gradiente	57
4.12. Máximos y Mínimos	58

4.13.	Máximos y Mínimos sobre Regiones Compactas	62
4.14.	El Método de los Multiplicadores de Lagrange	64
4.15.	Fórmula de Taylor	68
4.16.	Teorema de la función Inversa	69
4.17.	Teorema de la función Implícita	70
Capítulo 5.	CURVAS	73
5.1.	Parametrización de curvas	73
5.2.	Integración de Curvas	75
5.3.	Reparametrización de curvas	75
5.4.	Relación de velocidades para reparametrizaciones	76
5.5.	Longitud de arco	77
5.6.	Caso de parametrizaciones diferenciables	78
5.7.	Longitud de arco y reparametrizaciones	78
5.8.	Parámetro de longitud de arco	79
5.9.	Curvas espaciales: triedro móvil	81
5.10.	Curvatura	81
Capítulo 6.	INTEGRACION MULTIPLE	85
6.1.	La Noción Rústica de Integral	85
6.2.	Propiedades Lineales de Integrales	92
6.3.	Cálculo de Integrales Múltiples por Integrales Iteradas	93
6.4.	Sistemas de Coordenadas	96
6.5.	Algunas Aplicaciones	100
Capítulo 7.	INTEGRACION DE LINEA	103
7.1.	Calculando la masa de un cable	103
7.2.	Calculando el trabajo realizado por una fuerza sobre una trayectoria	104
7.3.	Centros de masas y momentos de inercia	107
7.4.	Fluidos planares	107
7.5.	Teorema de Green	108
Capítulo 8.	LEGOS Y SUPERFICIES	117
8.1.	Piezas de lego	117
8.2.	Reparametrizaciones de Piezas de Lego	120
8.3.	Integración en Piezas de Lego	121
8.4.	Legos	123
8.5.	Legos Orientados	124
8.6.	Superficies compactas	124
8.7.	Superficies cerradas	125
8.8.	Integración en Superficies Compactas	125
8.9.	Area de Superficies	125
8.10.	Plano Tangente	126
8.11.	Flujos en Superficies Compactas Orientadas	127
8.12.	El Teorema de Stokes	129
8.13.	Teorema de la Divergencia	132
Capítulo 9.	ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS	137
9.1.	Motivación	137
9.2.	Problema de Cauchy	137

9.3. Existencia de Soluciones	138
9.4. Unicidad de Soluciones	138
9.5. Método de Aproximaciones Sucesivas	140
9.6. Sistemas Autónomos	141
9.7. Problemas Unidimensionales	143
9.8. Ecuaciones Homogéneas	148
Capítulo 10. ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES	155
10.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales Cuasilineales de Primer Orden, Nociones Básicas	155
10.2. Formas Normales de Ecuaciones Diferenciales Parciales	165
Bibliografía	177
Índice alfabético	179

CAPÍTULO 1

FUNCIONES

1.1. Funciones

DEFINICIÓN 1.1. Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función F de A en B es una relación que asigna a cada valor de A un único valor de B . Usaremos la notación

$$F : A \rightarrow B : a \mapsto F(a) = b$$

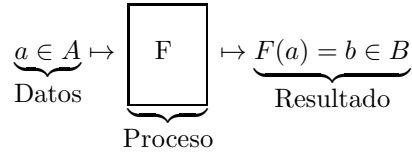
para indicar la función anterior, donde $b \in B$ es el valor asignado por F al valor $a \in A$.

El conjunto A es llamado el dominio de la función F y el conjunto

$$F(A) = \{b \in B : \exists a \in A \text{ tal que } F(a) = b\}$$

es llamado la imagen de F .

Podemos mirar una función $F : A \rightarrow B$ como un proceso que toma datos en A y luego de ser procesados por la máquina F obtenemos resultados en B :



En nuestras notas estaremos preocupados de funciones donde $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$, para ciertos valores de n y m .

EJEMPLO 1.1.

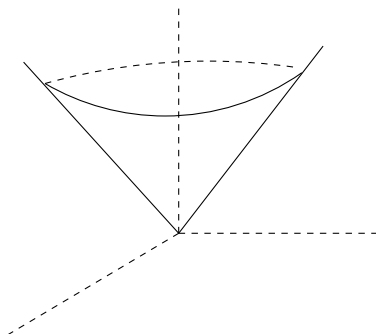
$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto F(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

EJEMPLO 1.2. Sean n un entero positivo y $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. La función

$$i_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto i_k(t) = te_k,$$

donde $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ es el k -ésimo vector canónico, es llamada una in-crustación de \mathbb{R} en la k -ésima coordenada de \mathbb{R}^n .

El tipo de funciones donde A es un intervalo en \mathbb{R} (puede ser abierto, cerrado, semiabierto, acotado o no-acotado) y la llegada es un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^m$ es llamada una *curva* en S .

FIGURA 1.1. Parte superior de un cono en \mathbb{R}^3

EJEMPLO 1.3. Sean n un entero positivo y $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. La función

$$\pi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \pi_k(x) = \langle x, e_k \rangle = x_k$$

es llamada la proyección en la k -ésima coordenada.

OBSERVACIÓN 1.1. En nuestro curso sólo nos interesaremos mayoritariamente de funciones definidas en subconjuntos de \mathbb{R}^n y llegada en \mathbb{R} , es decir, de funciones reales de varias variables.

1.2. Gráfico de Funciones

DEFINICIÓN 1.2. Dada una función $F : A \rightarrow B : a \mapsto F(a) = b$, tenemos asociado su gráfica definida por:

$$\text{Graf}(F) = \{(a, b) \in A \times B : F(a) = b\} \subset A \times B$$

EJEMPLO 1.4. Si $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto F((x, y)) = +\sqrt{x^2 + y^2} = z$, entonces

$$\text{Graf}(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, \quad z \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

Este resulta ser la parte superior de un cono en \mathbb{R}^3 .

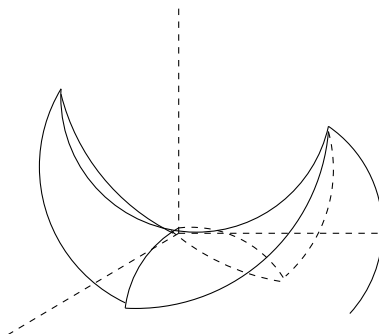
EJEMPLO 1.5. Si $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto F((x, y)) = x^2 - y^2 = z$, entonces

$$\text{Graf}(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

Este resulta ser una silla de montar en \mathbb{R}^3 .

Ejercicio. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ valores dados. Determinar la gráfica de la función $F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

OBSERVACIÓN 1.2. Es importante notar que cuando $n + m \geq 4$, se torna muy difícil el poder estudiar la función tratando de mirar su gráfica. Más adelante veremos otra manera para estudiar funciones (Superficies de Nivel).

FIGURA 1.2. Silla de montar en \mathbb{R}^3

1.3. Funciones Coordenadas

Dada un función $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, uno tiene asociada sus funciones coordenadas

$$F_k = \pi_k \circ F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \in A \mapsto \pi_k(F(x))$$

donde

$$\pi_k : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} : (y_1, \dots, y_m) \mapsto y_k$$

$$\text{Luego, } F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$$

EJEMPLO 1.6. *Para*

$$F : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (xy, 1/(x^2 + y^2)),$$

tenemos que sus funciones coordenadas son:

$$F_1 : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$$

$$F_2 : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 1/(x^2 + y^2)$$

1.4. Superficies de Nivel

Ya habíamos observado que es un poco difícil el entender F mirando su gráfica cuando $n + m \geq 4$. Una manera de poder estudiar esta función es por medio de sus *superficies de nivel*.

DEFINICIÓN 1.3. *Supongamos que tenemos una función*

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : x \in \Omega \mapsto F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$$

Una superficie de nivel es definida por:

$$F^{-1}(b) = \{x \in \Omega : F(x) = b\},$$

donde $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$.

OBSERVACIÓN 1.3. *Observemos que también podemos mirar las hiper-superficies de nivel de cada función coordenada $F_j : F_j^{-1}(b_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$. No es difícil el ver la igualdad:*

$$F^{-1}(b) = F_1^{-1}(b_1) \cap F_2^{-1}(b_2) \cap \dots \cap F_m^{-1}(b_m)$$

OBSERVACIÓN 1.4. Cuando $n = 2$ y $m = 1$, entonces hablaremos de curvas de nivel.

De alguna manera, lo anterior nos está diciendo que para entender F basta con entender sus funciones coordenadas. Más adelante nos iremos convenciendo de esta sugerencia. Primero algunas definiciones.

DEFINICIÓN 1.4.

1.- Un subconjunto de \mathbb{R}^3 es llamado un elipsoide centrado si (módulo permutación de las coordenadas) es de la forma:

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\},$$

donde $a, b, c > 0$.

2.- Un subconjunto de \mathbb{R}^3 es llamado un paraboloide centrado de dos caras si (módulo permutación de las coordenadas) es de la forma:

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\},$$

donde $a, b, c > 0$.

3.- Un subconjunto de \mathbb{R}^3 es llamado un hiperboloide centrado si (módulo permutación de las coordenadas) es de la forma:

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\},$$

donde $a, b, c > 0$.

EJEMPLO 1.7. Para $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, obtenemos que:

- (i) $F^{-1}(t) = \emptyset$, para $t < 0$;
- (ii) $F^{-1}(0) = \{(0, 0, 0)\}$;
- (iii) $F^{-1}(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = t\}$, una esfera centrada en $(0, 0, 0)$ y radio \sqrt{t} .

EJEMPLO 1.8. Para $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, tenemos que:

$$F^{-1}(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = t + z^2\}$$

donde

- (i) Si $t < 0$, entonces obtenemos un paraboloide de dos caras;
- (ii) Si $t = 0$, entonces obtenemos un cono;
- (iii) Si $t > 0$ obtenemos un hiperboloide de una cara.

EJEMPLO 1.9. Para $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2$, obtenemos que:

- (i) $F^{-1}(t) = \emptyset$, para $t < 0$;
- (ii) $F^{-1}(0) = \{(0, 0, 0)\}$;
- (iii) $F^{-1}(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = t\}$, un elipsoide centrada en $(0, 0, 0)$ con radio minimal $1/\sqrt{2}$ y radio maximal 1.

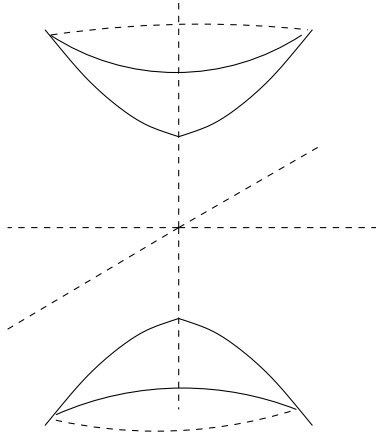


FIGURA 1.3. Un Paraboloido de dos caras

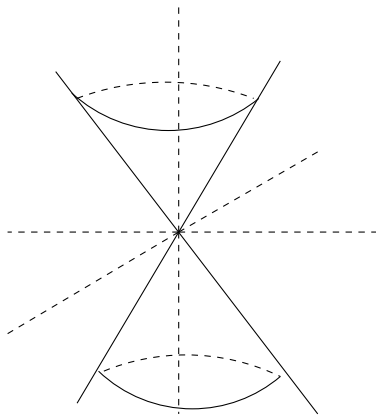


FIGURA 1.4. Un Cono

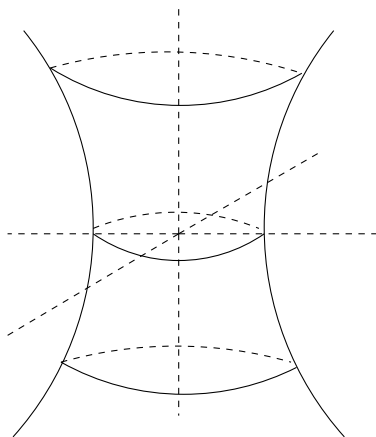


FIGURA 1.5. Un Hiperboloide

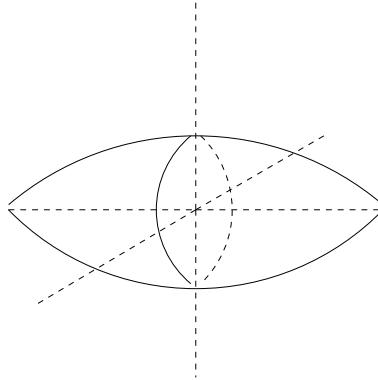


FIGURA 1.6. Un Elipsoide

Ejercicio.

- (1) Estudiar las curvas de nivel de la función

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

en función de los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- (2) Estudiar las superficies de nivel de

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2$$

- (3) Lo mismo para

$$F(x, y, z) = y^2 - x^2 - z$$

CAPÍTULO 2

EL ESPACIO EUCLIDIANO \mathbb{R}^n

2.1. Espacios Vectoriales Reales

DEFINICIÓN 2.1. Un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{R} es por definición un triple $(V, +, \cdot)$ donde:

- (1) V es un conjunto no vacío;
- (2) Las funciones (la primera llamada adición y la segunda amplificación)

$$+ : V \times V \rightarrow V \quad ; (x, y) \mapsto x + y$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V \quad ; (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

satisfacen las siguientes propiedades algebraicas:

- (2.1) *Propiedad Asociativa:*
Para $x, y, z \in V$ vale que $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (2.2) *Propiedad Conmutativa:*
Para $x, y \in V$ vale que $x + y = y + x$;
- (2.3) *Existe Neutro Aditivo:*
Existe $0 \in V$ tal que para todo $x \in V$ vale que $0 + x = x = x + 0$;
- (2.4) *Existen Inversos Aditivos:*
Para cada $x \in V$ existe $-x \in V$ tal que $x + (-x) = 0 = (-x) + x$;
- (2.5) *Propiedades Distributivas:*
Para $x, y \in V$ y $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ valen que $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $(\lambda + \nu)x = \lambda x + \nu x$;
- (2.6) *Neutro Amplificador:*
Si $1 \in \mathbb{R}$ denota el neutro multiplicativo de \mathbb{R} , entonces para todo $x \in V$ vale que $1x = x$;
- (2.7) *Asociatividad de Amplificación:*
Para $x \in V$ y $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ vale que $(\lambda\nu)x = \lambda(\nu x)$

2.2. Subespacios Vectoriales

DEFINICIÓN 2.2. Dado un espacio Vectorial V sobre el cuerpo \mathbb{R} y un subconjunto $W \subset V$, diremos que W es un subespacio vectorial de V (y lo cual denotaremos por $W < V$) si este es invariante bajo las dos operaciones de adición y amplificación, es decir, si tenemos la siguientes dos propiedades:

- (1) Para cada par $w_1, w_2 \in W$ se tiene que $w_1 + w_2 \in W$;
- (2) Para cada escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y para cada vector $w \in W$ se tiene que $\lambda w \in W$.

TAREA 2.1. Verificar que todo subespacio vectorial $W < V$ de un espacio vectorial V es en sí un espacio vectorial con las mismas operaciones definidas en V .

2.3. Combinaciones Lineales

DEFINICIÓN 2.3. Supongamos que tenemos un espacio vectorial V sobre el cuerpo \mathbb{R} .

- 1.- Para cada colección finita de vectores de V , digamos v_1, \dots, v_r , y escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, el vector

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r \in V$$

el cual es llamado una combinación lineal.

- 2.- Dado cualquier conjunto $S \subset V$, $S \neq \emptyset$, uno puede considerar el conjunto $\langle S \rangle$ formado por todas las posibles combinaciones lineales que se puedan formar con los vectores en S . Tal conjunto es llamado el subespacio generado por S .

TAREA 2.2. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y $S \subset V$ un conjunto no vacío. Verificar que el subespacio de V generado por S es en efecto un subespacio vectorial de V .

DEFINICIÓN 2.4. Un conjunto $S \subset V$, donde V es un espacio vectorial, es llamado un conjunto generador de V si ocurre que $V = \langle S \rangle$.

2.4. Conjuntos Linealmente Independientes

DEFINICIÓN 2.5. Un subconjunto $S \subset V$ de vectores en V es llamado linealmente dependiente si es posible encontrar vectores diferentes $v_1, \dots, v_r \in S$ y escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} - \{0\}$ tales que

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r$$

es decir, una combinación lineal no trivial para el neutro aditivo $0 \in V$. En caso de no suceder esta posibilidad, diremos que $S \subset V$ es un conjunto linealmente independiente.

TAREA 2.3.

- (1) Verificar que todo conjunto $S \subset V$ tal que $0 \in S$ es siempre un conjunto linealmente dependiente. Dar un ejemplo de un conjunto $S \subset V$ que es linealmente dependiente y tal que $0 \notin S$.
- (2) Si $S = \emptyset$, entonces S es un conjunto linealmente independiente.
- (3) Sea $S \subset V$, $S \neq \emptyset$. Verificar que S es linealmente independiente si y sólo si cada vector en $\langle S \rangle$ tiene una única expresión como combinación lineal (módulo permutación de factores).

2.5. Bases y Dimensión

DEFINICIÓN 2.6. Un conjunto $S \subset V$, de vectores de V , es llamada una base de V si:

- (1) S es conjunto generador de V ;
- (2) S es conjunto linealmente independiente.

TAREA 2.4. Verificar que si S_1 y S_2 son base del mismo espacio vectorial V , entonces existe una función biyectiva $f : S_1 \rightarrow S_2$. En particular, si una base de V tiene cardinalidad finita n , entonces toda otra base también tiene la misma cardinalidad n .

DEFINICIÓN 2.7. Si S es una base del espacio vectorial V , entonces (usando el ejercicio anterior) denotamos por $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ la cardinalidad de S y le llamamos la dimensión de V .

TAREA 2.5. Verificar que si $W < V$, entonces $\dim_K(W) \leq \dim_K(V)$ y que la igualdad ocurre sólo si $W = V$.

TAREA 2.6.

- (i) Verificar que \mathbb{R} es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Calcular $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$.
- (ii) Verificar que \mathbb{C} es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Calcular $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$

2.6. El Espacio Vectorial \mathbb{R}^n

Por cada entero $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ podemos considerar el *producto cartesiano* de n copias del conjunto \mathbb{R}

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-veces}} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n\}$$

Tenemos dos operaciones básicas en \mathbb{R}^n dadas por:

- (1) **Suma:** Dados los puntos $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos la suma de estos por

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

- (2) **Amplificación:** Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos la amplificación de x por α por

$$\alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

TAREA 2.7. El conjunto \mathbb{R}^n junto a esas dos operaciones resulta ser un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Determinar una base de \mathbb{R}^n y verificar que la dimensión de este espacio vectorial es n .

2.7. Transformaciones Lineales

Hay ciertas funciones que nos interesarán mucho en nuestra exposición. Estas son las transformaciones lineales.

DEFINICIÓN 2.8. Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo \mathbb{R} de dimensión n y m , respectivamente. Una función $L : V \rightarrow W$ es llamada una transformación lineal si esta preserva las estructuras de espacio vectorial, es decir:

1.- Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo vector $x \in V$ vale la igualdad

$$L(\lambda x) = \lambda L(x);$$

2.- Para todo par de vectores $x, y \in V$ vale la igualdad

$$L(x + y) = L(x) + L(y).$$

TAREA 2.8.

- (i) Deducir de la definición que toda transformación lineal está únicamente determinada por la acción en una base.
- (ii) Deducir que el conjunto $\mathcal{L}(V, W)$ de las transformaciones lineales $L : V \rightarrow W$ forma un espacio vectorial sobre \mathbb{R} (con la suma usual de funciones y multiplicación por escalares) de dimensión nm . Determine una base de este espacio vectorial. En el caso particular que $W = \mathbb{R}$, entonces este resulta ser un espacio vectorial de la misma dimensión que V . Usualmente denotamos este espacio vectorial como V^* y es llamado el espacio dual de V .
- (iii) Denotemos por V el espacio vectorial de las matrices reales dos por dos. Fijemos una matriz $A \in V$ y considere la función $L_A : V \rightarrow V$ definida como $L_A(X) = AX - XA$. Verificar que L_A es una transformación lineal.
- (iv) Denotemos por $\mathbb{R}_2[x]$ al espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual a dos en la variable x . Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tres números diferentes. Considere para cada $t \in \{a, b, c\}$ la función $L_t : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $L_t(p(x)) = p(t)$, es decir, L_t es la función evaluación en t . Verificar que estas tres funciones son lineales y que forman una base para $\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$.

TAREA 2.9. Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una transformación lineal. verificar que existen n números reales, digamos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, de manera que

$$L(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$$

Recíprocamente, toda función de la forma anterior es una transformación lineal.

DEFINICIÓN 2.9. Supongamos que tenemos una transformación lineal $L : V \rightarrow W$. Asociado con L tenemos los dos siguientes conjuntos:

- (i) El Núcleo de L , denotado por $\text{Ker}(L)$, que es definido como el conjunto de todos los vectores de V que van a parar al cero $0 \in W$ por la acción de L , es decir,

$$\text{Ker}(L) = \{x \in V : L(x) = 0\}$$

- (ii) La Imágen de L , denotado por $Im(L)$, formada por los vectores de W que se obtienen como llegada por L , es decir,

$$Im(L) = \{L(x) \in W : x \in V\}$$

TAREA 2.10.

- 1.- Verificar que el $Ker(L)$ es un subespacio vectorial de V y que la $Im(L)$ es un subespacio vectorial de W .
- 2.- Verificar que cualquier base del $Ker(L)$ puede ser extendida a una base del espacio V . Deducir de esto la fórmula

$$\dim_{\mathbb{R}} Ker(L) + \dim_{\mathbb{R}} Im(L) = \dim_{\mathbb{R}}(V)$$

DEFINICIÓN 2.10. Una transformación lineal $L : V \rightarrow W$ que es biyectiva (es decir, inyectiva y sobreyectiva) es llamada un isomorfismo. En este caso los espacios vectoriales V y W son llamados espacios isomorfos.

TAREA 2.11. Suponga que tenemos un isomorfismo $L : V \rightarrow W$, donde V y W son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K . Verificar que:

- (i) La inversa $L^{-1} : W \rightarrow V$ también es un isomorfismo (en particular, una transformación lineal).
- (ii) Las dimensiones de V y W son las mismas.
- (iii) Todo par de espacios vectorial sobre K de la misma dimensión n son isomorfos. En particular, isomorfos al espacio vectorial \mathbb{K}^n .
- (iv) Considere una base $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ para V y considere las funciones $L_j : V \rightarrow K : x_1v_1 + \dots + x_nv_n \mapsto x_j$, con $j = 1, \dots, n$. Verifique que $L_j \in V^*$ y que además $B_V^* = \{L_1, \dots, L_n\}$ es una base de V^* , llamada la base dual de B_V . Ahora, verifique que la función $Q : V \rightarrow V^*$ definida por $Q(x_1v_1 + \dots + x_nv_n) = x_1L_1 + \dots + x_nL_n$ resulta ser un isomorfismo.

2.8. Vectores y Valores Propios

Dada una transformación lineal $L : V \rightarrow V$, donde V es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{R} , entonces podemos naturalmente preguntarnos por la existencia de subespacios invariantes de L , es decir $W < V$ tal que $L(W) \subset W$. Por ejemplo, si $W = \{0\}$ ó $W = V$, entonces $L(W) \subset W$. Nos podemos preguntar por otros casos menos triviales.

DEFINICIÓN 2.11. Sean V y W espacios vectoriales sobre \mathbb{R} . Si $L : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, entonces un vector $v \in V - \{0\}$ para el cual existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ de manera que $L(v) = \lambda v$ es llamado un vector propio de L y tal escalar λ un valor propio de L .

TAREA 2.12. Sea V un espacio vectorial sobre K y $L : V \rightarrow V$ una función lineal.

- (i) Si $v \in V$ es un vector propio de L , entonces el subespacio de V generado por v , $W = \langle v \rangle = \{tv : t \in K\}$, es un espacio invariante por L

- (ii) Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ valores propios diferentes de L y consideremos $v_1, \dots, v_r \in V - \{0\}$ tales que v_j es vector propio respecto al valor propio λ_j . Verificar que $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un conjunto linealmente independiente.
- (iii) Supongamos que $\dim(V) = n$. Deducir de (ii) que la cantidad de valores propios de L es a lo más n .
- (iv) Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $L(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$. Determinar todos los valores y vectores propios de L .

2.9. Matrices Asociadas a Transformaciones Lineales

Sean V y W espacios vectoriales sobre \mathbb{R} . A cada transformación lineal $L : V \rightarrow W$ le podemos asociar matrices de tamaño $n \times m$ de la siguiente manera. Supongamos que tenemos una transformación lineal

$$L : V \rightarrow W$$

donde V es un espacio vectorial real de dimensión n y W es un espacio vectorial real de dimensión m . Tomemos bases (ordenadas)

$$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}, \text{ para } V \text{ y}$$

$$B_W = \{w_1, \dots, w_m\}, \text{ para } W$$

Denotemos por $\widehat{\mathbb{R}}^n$ (respectivamente, por $\widehat{\mathbb{R}}^m$) al espacio vectorial real de dimensión n (respectivamente, m) formado por las matrices de tamaño $n \times 1$ (respectivamente, de tamaño $m \times 1$). Ahora consideremos los siguientes isomorfismos lineales

$$\phi_V : V \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n \quad : \quad v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n \mapsto {}^t[a_1 \dots a_n]$$

$$\phi_W : W \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^m \quad : \quad w = b_1w_1 + \dots + b_mw_m \mapsto {}^t[b_1 \dots b_m]$$

Ahora miremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L} & W \\ \phi_V \downarrow & & \downarrow \phi_W \\ \widehat{\mathbb{R}}^n & \xrightarrow{\widehat{L}} & \widehat{\mathbb{R}}^m \end{array}$$

donde $\widehat{L} = \phi_W L \phi_V^{-1}$. Veamos que forma tiene \widehat{L} . El vector $v \in V$ tiene una única expresión de la forma

$$v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$$

donde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y luego tenemos que

$$L(v) = a_1L(v_1) + \dots + a_nL(v_n)$$

Por otro lado, tenemos además que $L(v_j) \in W$ tiene una única expresión de la forma

$$L(v_j) = b_{1j}w_1 + \dots + b_{mj}w_m$$

donde $b_{1j}, \dots, b_{mj} \in \mathbb{R}$. Ahora, esto nos dice (después de un corto cálculo) que

$$L(v) = b_1w_1 + \dots + b_mw_m$$

donde

$$b_k = a_1b_{k1} + a_2b_{k2} + \dots + a_nb_{kn}$$

Consideremos la matriz

$$M(L, B_V, B_W) = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

Observemos que tenemos la igualdad

$$M(L, B_V, B_W)^t [a_1 \cdots a_n] = {}^t [b_1 \cdots b_m]$$

donde ${}^t [s_1 \cdots s_p]$ denota la matriz columna de tamaño $p \times 1$. Luego no es difícil ver que

$$\widehat{L}({}^t [a_1 \cdots a_n]) = M(L, B_V, B_W)^t [b_1 \cdots b_m],$$

es decir, la transformación lineal L es descrita como multiplicación por la matriz $M(L, B_V, B_W)$.

DEFINICIÓN 2.12. *La matriz construida anteriormente es llamada la representación matricial de la transformación lineal L en las bases B_V y B_W .*

TAREA 2.13.

- (i) *Consideremos otras bases (ordenadas) $\widehat{B}_V = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ para V y $\widehat{B}_W = \{w'_1, \dots, w'_m\}$ para W . Verificar que se tiene la siguiente igualdad:*

$$\begin{array}{c} M(L, \widehat{B}_V, \widehat{B}_W) \\ \parallel \\ M(I_W, B_W, \widehat{B}_W) M(L, B_V, B_W) M(I_V, \widehat{B}_V, B_V), \end{array}$$

donde

$$I_V : V \rightarrow V \quad y \quad I_W : W \rightarrow W$$

son la función identidad. La matriz del tipo $M(I_V, \widehat{B}_V, B_V)$ es llamada una matriz de cambio de base.

- (ii) *Verificar que $M(I_V, B_V, B_V)$ es siempre la identidad, donde B_V es cualquier base (ordenada) de V .*
- (iii) *Sea $L : V \rightarrow W$ un isomorfismo entre espacios vectoriales de dimensión finita. Dada una base B_V para V y una base B_W para W , consideremos las matrices asociadas $M(L, B_V, B_W)$ y $M(L^{-1}, B_W, B_V)$. Usando el hecho que $I_V = L^{-1}L$ y $I_W = LL^{-1}$ verificar que estas matrices son inversas una de la otra, en particular, cada matriz asociada a un isomorfismo es invertible.*
- (iv) *Considere el espacio vectorial real $V = M(2 \times 2, \mathbb{R})$ de las matrices reales de tamaño dos por dos. Calcule una base B de V y diga cual es entonces la dimensión de V . Tome una matriz $A \in V$ cualquiera y fíjela. Considere la función $L_A : V \rightarrow V$ definida por $L_A(X) = AX - XA$. Verificar que $L_A \in \mathcal{L}(V, V)$ (es decir, es lineal). Calcule la matriz $M(L_A, B, B)$.*
- (iv) *Sea $L : V \rightarrow V$ una función lineal, donde V es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión n . Consideremos una base B para V y sea $M = M(L, B, B)$.*

- (a) Verificar que los valores propios de L son exactamente las soluciones del polinomio característico

$$\chi_M(\lambda) = \text{Det}(M - \lambda I)$$

donde I es la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

- (b) Verificar que si L tiene n valores propios diferentes, digamos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, entonces existe una base B para V de manera que $M(L, B, B)$ es la matriz diagonal $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (mirar el ejercicio de sección 1.11).

2.10. El Espacio Euclidiano \mathbb{R}^n

DEFINICIÓN 2.13. En el espacio vectorial \mathbb{R}^n podemos considerar el producto interior Euclidiano

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Este producto satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\langle x, x \rangle \geq 0$;
- (2) $\langle x, x \rangle = 0$ sólo si $x = (0, \dots, 0)$;
- (3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
- (4) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

DEFINICIÓN 2.14. El espacio vectorial \mathbb{R}^n junto al producto interior Euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es llamado un espacio Euclidiano de dimensión n . Definimos la norma de un vector por

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

TAREA 2.14. Verificar las siguientes propiedades:

- (i) $\|x\| \geq 0$;
- (ii) $\|x\| = 0$ sólo si $x = (0, \dots, 0)$;
- (iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

TEOREMA 2.15 (Desigualdad de Cauchy). Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ en \mathbb{R}^n , se tiene

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

con igualdad sólo si x e y son linealmente dependientes.

DEMOSTRACIÓN. Si x e y son linealmente dependientes, entonces la igualdad es clara. Supongamos que x e y son linealmente independientes. Luego, $tx - y \neq 0$ para todo valor $t \in \mathbb{R}$. De aquí obtenemos en particular que

$$0 < \|tx - y\|^2 = \langle tx - y, tx - y \rangle = t^2 \|x\|^2 - 2t \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Esto dice que la ecuación cuadrática en $t \in \mathbb{R}$ no posee raíces, es decir, su discriminante debe ser negativa

$$4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 < 0$$

□

La desigualdad de Cauchy permite definir ángulos entre vectores no nulos de la siguiente manera.

DEFINICIÓN 2.16. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n - \{(0, \dots, 0)\}$, entonces existe un único valor $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta$$

El valor θ es llamado el ángulo entre x e y .

Otra consecuencia de la desigualdad de Cauchy es:

COROLARIO 2.17 (Desigualdad Triangular). Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

con igualdad sólo si x e y son linealmente dependientes.

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2$$

con la igualdad sólo si x e y son linealmente dependientes. \square

Podemos usar el producto interior $\langle x, y \rangle$, para $x, y \in \mathbb{R}^n$, para definir *vectores ortogonales*.

DEFINICIÓN 2.18. Diremos que $x, y \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales si $\langle x, y \rangle = 0$. En particular, si $x, y \neq 0$, entonces ellos ortogonales si y sólo si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

En forma particular, si W es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n , entonces denotaremos por W^\perp al conjunto de todos los vectores en \mathbb{R}^n que son ortogonales a todo vector en W .

TAREA 2.15. Verificar que W^\perp es también un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n y que $W \cap W^\perp = \{0\}$. Verificar que $\mathbb{R}^n = W + W^\perp$. Deducir que todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir de manera única como $x = u + v$, donde $u \in W$ y $v \in W^\perp$.

2.11. El Espacio Topológico \mathbb{R}^n

DEFINICIÓN 2.19. La distancia Euclidiana entre dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ es definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Ejercicio. Verificar las siguientes propiedades de la distancia Euclidiana.

- (i) $d(x, y) \geq 0$;
- (ii) $d(x, y) = 0$ sólo si $x = y$;
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

DEFINICIÓN 2.20.

- 1.- Una bola abierta de radio $r > 0$ con centro en $x \in \mathbb{R}^n$ es por definición el conjunto

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}$$

- 2.- Una bola cerrada de radio $r > 0$ con centro en $x \in \mathbb{R}^n$ es por definición el conjunto

$$\overline{B_r(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r\}$$

- 3.- Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es llamado un conjunto abierto si para cada $x \in \Omega$ existe un radio $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subset \Omega$.
- 4.- Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ es llamado un conjunto cerrado si su complemento $F^c = \mathbb{R}^n - F$ es un conjunto abierto.
- 5.- Un conjunto acotado que es por definición un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ para el cual existe algún $R > 0$ tal que $A \subset B_R(0)$.

EJEMPLO 2.1.

- (i) Sea $p \in \mathbb{R}^n$ un punto cualquiera. Entonces el conjunto $\mathbb{R}^n - \{p\}$ (el complemento de un punto) es un conjunto abierto.
- (ii) El conjunto $\mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ es un conjunto abierto.
- (iii) El conjunto $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1\}$ no es un conjunto abierto.

OBSERVACIÓN 2.1. Los únicos subconjuntos de \mathbb{R}^n que son abiertos y cerrados al mismo tiempo son el conjunto vacío \emptyset y el espacio total \mathbb{R}^n . Dar una razón (recordar Mat I) que justifique esta observación.

2.12. Isometrías Euclidianas

DEFINICIÓN 2.21. Una función $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $d(T(x), T(y)) = d(x, y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, es llamada una isometría Euclidiana de \mathbb{R}^n . En otras palabras, una isometría es una función que preserva distancias.

Es fácil verificar que toda isometría Euclidiana es una función inyectiva, es decir, $T(x) = T(y)$ sólo si $x = y$. Algunos ejemplos de isometrías son las siguientes funciones:

Traslaciones. Por cada $p \in \mathbb{R}^n$ podemos construir la función

$$T_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; T_p(x) = x + p,$$

llamada la *traslación* en p . Como

$$d(T_p(x), T_p(y)) = \|(x + p) - (y + p)\| = \|x - y\| = d(x, y),$$

tenemos que toda traslación es una isometría Euclidiana.

Transformaciones Ortogonales Una función $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la cual satisface

$$\langle R(x), R(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, es llamada una *transformación ortogonal*. Por ejemplo, $R(x) = -x$ es una transformación ortogonal.

La pregunta natural es la siguiente: **Cuales són las isometrías de \mathbb{R}^n ?** Para responder a esta pregunta, veamos algunas definiciones.

DEFINICIÓN 2.22. La base canónica de \mathbb{R}^n es $\{e_1, \dots, e_n\}$, donde $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ es tal que el valor 1 se encuentra en la posición k -ésima. Llamaremos a e_k el k -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^n . Esta base tiene la propiedad que $\langle e_k, e_r \rangle = \delta_{k,r}$, donde $\delta_{k,r}$ es la delta de Kroenecker. Toda base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbb{R}^n es llamada una base ortonormal si $\langle v_k, v_r \rangle = \delta_{k,r}$.

TEOREMA 2.23. Una función $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación ortogonal si y sólo si R es una transformación lineal y $\{R(e_1), \dots, R(e_n)\}$ es una base ortonormal.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación ortogonal. Entonces tenemos de la definición que

$$\langle R(e_k), R(e_r) \rangle = \langle e_k, e_r \rangle = \delta_{k,r}$$

Si obtenemos que $\{R(e_1), \dots, R(e_n)\}$ es una base de \mathbb{R}^n , entonces lo anterior nos dice que es una base ortonormal. Para esto, consideremos una combinación lineal

$$\sum_{j=1}^n a_j R(e_j) = (0, \dots, 0)$$

Ahora,

$$0 = \left\langle \sum_{j=1}^n a_j R(e_j), R(e_k) \right\rangle = a_k$$

para cada $k = 1, \dots, n$.

Procedamos a ver que R es una función lineal. Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces usando el hecho que $\{R(e_1), \dots, R(e_n)\}$ es base de \mathbb{R}^n , podemos escribir

$$R(x) = \sum_{j=1}^n b_j R(e_j)$$

Luego,

$$b_k = \langle R(x), R(e_k) \rangle = \langle x, e_k \rangle = x_k,$$

obteniendo que

$$R(x) = \sum_{j=1}^n x_j R(e_j),$$

es decir, que R es una función lineal.

Recíprocamente, supongamos que $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función lineal tal que $\{R(e_1), \dots, R(e_n)\}$ es base ortonormal de \mathbb{R}^n . En este caso, escribiendo $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, obtenemos que

$$\langle R(x), R(y) \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \langle R(e_j), R(e_i) \rangle x_i y_j = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

es decir, R es una transformación ortogonal. \square

Una consecuencia directa es que si $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación ortogonal, entonces

$$\|R(x)\|^2 = \langle R(x), R(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

del cual obtenemos

$$\|R(x) - R(y)\| = \|R(x - y)\| = \|x - y\|,$$

es decir, toda transformación ortogonal es una isometría Euclidiana.

OBSERVACIÓN 2.2. *Si A es la matriz asociada a una transformación ortogonal R , en la base canónica, entonces obtenemos que ${}^tAA = I$. Una matriz de este tipo es llamada una matriz ortogonal. Recíprocamente, si tenemos una matriz ortogonal A y consideramos una transformación lineal $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ para la cual A es su matriz asociada en la base canónica, entonces R es una transformación ortogonal.*

TAREA 2.16. *Verificar que la composición de isometrías Euclidianas es de nuevo una isometría Euclidiana. En particular, composición de translaciones y/o transformaciones ortogonales son isometrías Euclidianas.*

El siguiente resultado muestra que estas son todas las isometrías Euclidianas.

TEOREMA 2.24. *Toda isometría Euclidiana es composición de translaciones y/o transformaciones ortogonales.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una isometría Euclidiana. Componiendo con una translación, podemos suponer que $Q(0) = 0$. Al ser Q una isometría Euclidiana que fija el origen, debemos tener que Q preserva la norma, es decir, $\|Q(x)\| = \|Q(x) - Q(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Ahora,

$$\begin{aligned} \|Q(x) - Q(y)\|^2 &= \langle Q(x) - Q(y), Q(x) - Q(y) \rangle \\ &= \|Q(x)\|^2 + \|Q(y)\|^2 - 2\langle Q(x), Q(y) \rangle \end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$\begin{aligned} 2\langle Q(x), Q(y) \rangle &= \|Q(x)\|^2 + \|Q(y)\|^2 - \|Q(x) - Q(y)\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 \\ &= 2\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

es decir, obtenemos una transformación ortogonal. □

LIMITES Y FUNCIONES CONTINUAS

3.1. Puntos límites

DEFINICIÓN 3.1. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ y un punto $p \in \mathbb{R}^n$, decimos que p es un punto de acumulación de A si dado cualquier margen de error $R > 0$ existen puntos de A (diferentes de p) próximos a p dentro de tal margen de error, es decir,

$$\text{Para todo } R > 0 \text{ vale que } (B_r(p) - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$$

EJEMPLO 3.1. Consideremos el subconjunto de \mathbb{R}^3 siguiente:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z > 0\}$$

El punto $p = (0, 0, 0)$ es un punto límite de A . Para ver esto, consideremos los puntos de A siguientes: $a_k = (1/k, 0, 1/k)$, para $k = 1, 2, 3, \dots$. Entonces $d(p, a_k) = \|p - a_k\| = \sqrt{2}/k$. Es claro que dado cualquier margen de error $r > 0$, existe k tal que $\sqrt{2}/k < r$.

TAREA 3.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. verificar que todo punto de Ω es un punto de acumulación de Ω .

3.2. Límite

Dada una función $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y un punto de acumulación p para A , podemos interesarnos con el comportamiento de $F(x)$ a medida que $x \in A$ se acerca a p . Puede ocurrir que no haya un comportamiento controlable.

DEFINICIÓN 3.2. Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función y p un punto de acumulación de A . Si tenemos que los valores de $F(x)$ se acercan a un valor preciso $b \in \mathbb{R}^m$ no importando la manera que $x \in A$ se acerca a p , diremos que existe el límite de F , con valor $b \in \mathbb{R}^m$, cuando $x \in A$ se acerca a p . Esto lo denotaremos esto por

$$\lim_{x \rightarrow p} F(x) = b$$

Formalmente, esto dice que dado cualquier margen de error de salida $\epsilon > 0$ siempre es posible escoger un margen de error de entrada $\delta > 0$ tal que $\|F(x) - b\| < \epsilon$ si tenemos que $\|x - p\| < \delta$ con $x \in A$, $x \neq p$.

EJEMPLO 3.2. Consideremos la función

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Si nos acercamos a $(0, 0)$ por el camino $y = 0$, obtenemos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=0} F(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} F(x, 0) = 1$$

Por otro lado, si nos acercamos por el camino $x = 0$, obtenemos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), x=0} F(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} F(0, y) = -1$$

De esta manera vemos que no puede existir

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$$

TAREA 3.2. Verificar que en el ejemplo anterior existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} F(x, y) = 0$$

3.3. Propiedades de Límites

En esta sección veremos algunas de las propiedades que satisfacen los límites y que nos servirán para calcular estos de manera simple.

TEOREMA 3.3. Supongamos que tenemos funciones

$$F, G : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ h : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

y constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dadas. Sea $p \in \mathbb{R}^n$ un punto de acumulación de Ω y supongamos que existen los límites

$$\lim_{x \rightarrow p} F(x) = A = (A_1, \dots, A_m) \\ \lim_{x \rightarrow p} G(x) = B = (B_1, \dots, B_m) \\ \lim_{x \rightarrow p} h(x) = c$$

Entonces, tenemos la existencia de los siguientes límites:

(1) **Propiedad Lineal:**

$$\lim_{x \rightarrow p} (\alpha F + \beta G)(x) = \alpha A + \beta B = (\alpha A_1 + \beta B_1, \dots, \alpha A_m + \beta B_m)$$

(2) **Invariancia Euclidiana:**

$$\lim_{x \rightarrow p} \langle F(x), G(x) \rangle = \langle A, B \rangle = \sum_{j=1}^m A_j B_j$$

(3) **Invariancia Por Amplificaciones:**

$$\lim_{x \rightarrow p} h(x)F(x) = cA = (cA_1, \dots, cA_m)$$

EJEMPLO 3.3. *Tomemos la proyección*

$$\pi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \langle x, e_k \rangle = x_k.$$

Para todo $p \in \mathbb{R}^n$ tenemos que existen

$$\lim_{x \rightarrow p} x = p$$

$$\lim_{x \rightarrow p} e_k = e_k$$

Como $\pi(x) = \langle x, e_k \rangle$, entonces por propiedad (2) del teorema anterior obtenemos que existe

$$\lim_{x \rightarrow p} \pi(x) = \langle p, e_k \rangle = p_k$$

EJEMPLO 3.4. *Consideremos la función $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$F((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2,$$

y tomemos $p = (a, b, c)$. Entonces, usando las propiedades anteriores y el ejemplo anterior obtenemos que

$$\lim_{x \rightarrow p} F(x) = a^2 + ab + c^2.$$

TEOREMA 3.4. *Supongamos que tenemos una función*

$$K : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

cuyas funciones coordenadas son K_1, \dots, K_m , es decir, para $x \in \Omega$ tenemos que $K(x) = (K_1(x), K_2(x), \dots, K_m(x))$. Si $p \in \mathbb{R}^n$ es punto de acumulación de Ω , entonces

$$\text{existe } \lim_{x \rightarrow p} K(x) = B = (b_1, \dots, b_m)$$

sí y sólo si

$$\text{existen } \lim_{x \rightarrow p} K_j(x) = b_j, \quad \text{para } j = 1, \dots, m.$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, supongamos que existe $\lim_{x \rightarrow p} K(x) = B$. Entonces usando $F(x) = K(x)$ y $G(x) = e_j$ en la propiedad (2) de límites, obtenemos la existencia de $\lim_{x \rightarrow p} K_j(x) = b_j$. Recíprocamente, si tenemos la existencia de todos los límites $\lim_{x \rightarrow p} K_j(x) = b_j$, entonces por propiedad (3) con $h(x) = K_j(x)$ y $F(x) = e_j$, obtenemos la existencia de $\lim_{x \rightarrow p} K_j(x)e_j = b_j e_j$, para $j = 1, \dots, m$. Ahora, usamos la propiedad (1) y el hecho que $K(x) = K_1(x)e_1 + \dots + K_m(x)e_m$ para obtener la existencia de $\lim_{x \rightarrow p} F(x) = B$. \square

OBSERVACIÓN 3.1. *El teorema anterior nos dice que el proceso de límites de funciones vectoriales es consecuencia del proceso de límites de funciones reales. Esto tendrá gran importancia en las definiciones de continuidad y diferenciabilidad de funciones vectoriales.*

TAREA 3.3.

(1) Calcular los siguientes límites en caso de existir:

$$\lim_{(x,y) \in \Omega \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \in \Omega \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

para

(i) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax\}$, donde $a \neq 0$;

(ii) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax^2\}$, donde $a \neq 0$;

(iii) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = ax\}$, donde $a \neq 0$.

(2) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcular los siguientes (en caso de existir):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

¿Qué puede deducir de su respuesta?

3.4. Continuidad

DEFINICIÓN 3.5. Consideremos una función $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y un punto $p \in A$. Si p no es punto de acumulación de A , entonces diremos que F es continua en p . Si p es un punto de acumulación de A , entonces diremos que F es continua en el punto $p \in A$ si:

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $\|F(x) - F(p)\| < \epsilon$ para todo $x \in B_\delta(p) \cap A$. En este caso estamos diciendo que

$$\lim_{x \rightarrow p} F(x) = F(p)$$

De manera informal, la función F es continua en el punto de acumulación $p \in A$ si podemos controlar el error de salida para $F(x)$ si podemos controlar el error de elegir $x \in A$ cercano a p . Para entender esto, debemos pensar que la función es un proceso que toma datos (los valores en A) y entrega resultados (los valores imágenes por F). En la vida cotidiana, nuestros instrumentos de medición cometen errores (esto puede significar tomar un valor aproximado al valor preciso p , pero con un margen de posible error).

DEFINICIÓN 3.6. Una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que es continua en cada punto de Ω es llamada continua en Ω ó solamente continua.

TAREA 3.4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ y no es continua en $(0, 0)$.

3.5. Propiedades de Funciones Continuas

En esta sección veremos algunas de las propiedades que satisfacen las funciones continuas y que son consecuencia directa de las propiedades de los límites. Por la definición de continuidad, si tenemos un punto $p \in \Omega$ que no es punto de acumulación de Ω , entonces la continuidad es gratis para cualquier función definida sobre Ω .

TEOREMA 3.7. *Supongamos que tenemos funciones*

$$F, G : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$h : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

y constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dadas. Sea $p \in \Omega$ un punto de acumulación de Ω y supongamos que las funciones anteriores son todas continuas en p , entonces tenemos que las funciones $\alpha F + \beta G$, $\langle F(x), G(x) \rangle$, $h(x)F(x)$ son continuas en p .

EJEMPLO 3.5. *Tomemos la proyección*

$$\pi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \langle x, e_k \rangle = x_k.$$

Para todo $p \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow p} \pi(x) = p_k = \pi(p),$$

luego π es continua en \mathbb{R}^n .

EJEMPLO 3.6. *Consideremos la función $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$F((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2,$$

y tomemos $p = (a, b, c)$. Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow p} F(x) = a^2 + ab + c^2 = F(p),$$

luego esta función es continua en \mathbb{R}^n .

TEOREMA 3.8. *Supongamos que tenemos una función*

$$K : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

cuyas funciones coordenadas son K_1, \dots, K_m . Sea $p \in \Omega$, entonces

K es continua en p si y sólo si K_j es continua en p para $j = 1, \dots, m$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si p no es punto de acumulación de Ω , entonces esto es directo por la definición. Si p es punto de acumulación de Ω , entonces esto es directo del ejemplo 2.14. \square

TEOREMA 3.9 (Composición de Funciones Continuas). *Sean*

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{y} \quad G : \Delta \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

funciones tales que $F(\Omega) \subset \Delta$. Si F es continua en $p \in \Omega$ y G es continua en $F(p) \in \Delta$, entonces $G \circ F$ es continua en p .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un margen de error de salida $\epsilon > 0$. Queremos ver que existe un margen de error de entrada $\delta > 0$ tal que si $\|x - p\| < \delta$, con $x \in \Omega$, entonces $\|G \circ F(x) - G \circ F(p)\| < \epsilon$.

Como sabemos que G es continua en $F(p)$, tenemos que existe un margen de error de entrada (para G) $\eta > 0$ tal que si $\|y - F(p)\| < \eta$, con $y \in \Delta$, entonces $\|G(y) - G(p)\| < \epsilon$.

Por otro lado, F es continua en p . Tomando $\eta > 0$ como margen de error de salida para F , sabemos la existencia de un margen de error de entrada (para F) $\delta > 0$ tal que si $\|x - p\| < \delta$, con $x \in \Omega$, entonces $\|F(x) - F(p)\| < \eta$.

Combinando todo lo anterior, vemos que el valor δ escogido funciona. \square

EJEMPLO 3.7. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow \sin(e^{x+y})$. Consideremos las funciones

$$H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow x + y$$

$$E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : u \rightarrow e^u$$

$$S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : v \rightarrow \sin(v)$$

Es claro ver que todas esas funciones son continuas y que

$$F(x, y) = S \circ E \circ H(x, y),$$

luego F es continua.

OBSERVACIÓN 3.2. Este ejemplo nos muestra lo útil que es la propiedad de composición de funciones continuas. Para ver esto, trate de verificar la continuidad de la definición con límites.

Para la siguiente propiedad básica de funciones continuas reales necesitaremos la siguiente definición. Sean $p, q \in \mathbb{R}^n$. Entonces definimos su trazo como el conjunto

$$[p, q] = \{p + \lambda(q - p) : \lambda \in [0, 1]\}$$

TEOREMA 3.10 (Teorema del Valor Intermedio). Consideremos una función continua

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

y sean $p, q \in \Omega$ tal que el trazo $[p, q] \subset \Omega$. Si $F(p) \leq F(q)$, entonces para cada $t \in [F(p), F(q)]$ existe un punto $w \in [p, q]$ tal que $F(w) = t$.

DEMOSTRACIÓN. La idea de la demostración es simple y utiliza el teorema del valor intermedio de funciones reales de una variable. Consideremos la función $J : [0, 1] \rightarrow [p, q] \subset \mathbb{R}^n$ definida por $J(\lambda) = p + \lambda(q - p)$. Es claro que esta función J es continua en $[0, 1]$. Ahora consideremos la composición $G = F \circ J : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, la cual es una función continua (al ser composición de funciones continuas). Ahora, como tenemos que $G(0) = F(p)$ y $G(1) = F(q)$, dado cualquier $t \in [F(p), F(q)]$ existe $\lambda_t \in [0, 1]$ con $G(\lambda_t) = t$, es decir, basta tomar $w = J(\lambda_t) = p + \lambda_t(q - p)$. \square

TAREA 3.5.

- (1) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el punto $p = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Considere la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x, a_2, a_3, \dots, a_n).$$

¿Es g continua en $x = a_1$?

- (2) Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y considere la función

$$g : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por:

$$g(x, y) = g(y, x)$$

$$g(x, x) = f(x)$$

Si $0 \leq x < y \leq 1$, entonces $g(x, y) = \text{Max}\{f(t) : x \leq t \leq y\}$

¿Es g continua?

FUNCIONES DIFERENCIABLES

4.1. Funciones Diferenciables

La idea básica es la siguiente. Dada una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde Ω es un subconjunto abierto del espacio Euclidiano \mathbb{R}^n , y dado un punto $p \in \Omega$, nos gustaría poder reemplazar f por una función más simple (computacionalmente) que valga lo mismo en el punto $p = (a_1, \dots, a_n)$ (es decir, $f(p)$) y que sea bastante cercana a f al menos cuando estamos muy cerca de p . Lo que sirve como una función más simple es del tipo $Q(x) = L(x) + q$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, donde $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función lineal y $q \in \mathbb{R}^m$.

DEFINICIÓN 4.1. *Una función del tipo*

$$Q(x) = L(x) + q, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega,$$

donde $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función lineal y $q \in \mathbb{R}^m$ es llamada una función afín.

Si queremos que $Q(p) = f(p)$, entonces debemos pedir $q = f(p) - L(p)$, es decir $Q(x) = L(x - p) + f(p)$. Ahora, para medir que tan cercanas están $f(x)$ y $Q(x) = L(x - p) + f(p)$, basta mirar su diferencia:

$$f(x) - f(p) - L(x - p)$$

Ahora, la idea es que esta diferencia sea cercana a cero cuando estamos cerca de p y aún más, queremos que ella vaya a cero cuando x se aproxima a p .

DEFINICIÓN 4.2. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función, donde Ω es un subconjunto abierto del espacio Euclidiano \mathbb{R}^n , y $p \in \Omega$. Diremos que f es diferenciable en p si existe una función lineal $Df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p) - Df(p)(x - p)}{\|x - p\|} = 0$$

Llamamos a $Df(p)$ la diferencial de f en p .

TAREA 4.1. *Verificar que esta definición coincide con la definición de derivada hecha en una variable (para $n = m = 1$).*

DEFINICIÓN 4.3. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función, donde Ω es un subconjunto abierto del espacio Euclidiano \mathbb{R}^n . Si la función f es diferenciable en cada punto de Ω , entonces diremos que f es diferenciable en Ω ó simplemente que es diferenciable en caso de no existir confusión sobre Ω .*

TAREA 4.2. Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función lineal. Verificar que L es diferenciable y que $DL(p) = L$, para cada $p \in \mathbb{R}^n$.

OBSERVACIÓN 4.1. Cuando $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable, tenemos definida la siguiente función llamada la diferencial de f :

$$Df : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

la cual asigna a cada punto $p \in \Omega$ su diferencial $Df(p)$. Si hacemos una identificación (por un isomorfismo) de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ con \mathbb{R}^{n+m} , entonces obtenemos una función

$$Df : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$$

Ahora uno puede preguntarse si Df es continua ó mejor aún diferenciable. En particular, esto nos permite analizar diferenciableidad de mayor orden para f en cada uno de los puntos de Ω .

4.2. Continuidad Asegurada por Diferenciabilidad

Cuando uno trata de ver si una función es o no diferenciable en un punto, nos encontramos ante dos problemas:

- (1) Deducir un posible candidato para $Df(p)$; y
- (2) verificar que funciona el límite anterior.

Esto en general puede parecer muy difícil, pero veremos más adelante que esto no lo es tanto. Un primer paso sería saber si una función puede o no ser diferenciable en un punto p . En la asignatura de cálculo en una variable vimos el siguiente hecho para $n = m = 1$.

TEOREMA 4.4. Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable en el punto $p \in \Omega$, entonces f es continua en p .

DEMOSTRACIÓN. Para ver esto, supongamos que tenemos una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en $p \in \Omega$. Entonces sabemos que existe una función lineal $Df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p) - Df(p)(x - p)}{\|x - p\|} = 0$$

Esto dice que dado cualquier error $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ de manera que si $\|x - p\| < r$ ($x \in \Omega$), entonces

$$\|f(x) - f(p) - Df(p)(x - p)\| < \epsilon \|x - p\|$$

Esto asegura que

$$\|f(x) - f(p)\| < \|Df(p)(x - p)\| + \epsilon \|x - p\| \leq (A + \epsilon) \|x - p\|$$

donde $A > 0$. Luego, basta tomar $\delta > 0$ cualquier número positivo menor que r y que $\epsilon/(A + \epsilon)$. \square

TAREA 4.3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ a, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Verificar que para todo valor $a \in \mathbb{R}$ f no es diferenciable en $(0, 0)$.

Usando los hechos que (i) el límite de una función vectorial es el límite de sus funciones coordenadas (suponiendo que todas existan) [ver ejemplo 2.14] y (ii) que las funciones coordenadas de una función lineal son funciones lineales, obtenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 4.5. Consideremos una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, cuyas funciones coordenadas son $f_1, \dots, f_m : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. f es diferenciable en un punto $p \in \Omega$ si y sólo si cada f_1, \dots, f_m es diferenciable en p . Más aún, tenemos que

$$Df(p) = (Df_1(p), \dots, Df_m(p))$$

OBSERVACIÓN 4.2. El teorema anterior nos está diciendo que el estudio de funciones diferenciables con llegada vectorial es consecuencia del estudio de funciones diferenciables reales, es decir, con llegada a \mathbb{R} .

4.3. Derivadas Parciales y Direccionales

Por lo observado en la sección anterior, nos bastará analizar el caso de funciones reales. Supongamos que hemos pasado el test de continuidad de una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en el punto $p \in \Omega$. Aún no somos capaces de decidir si f es diferenciable en tal punto!!! Nos gustaría en este punto poder conjeturar una posible función lineal candidata para $Df(p)$ para poder usarla en la definición usando límites. Para esto, respondamos a la siguiente pregunta:

¿Qué forma tiene $Df(p)$ si esta existe?

Suponiendo que f es diferenciable en el punto p , tenemos que existe

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p) - Df(p)(x - p)}{\|x - p\|} = 0$$

Esto nos dice que no importa la manera en que nos acerquemos con x al punto p , la fracción

$$\frac{f(x) - f(p) - Df(p)(x - p)}{\|x - p\|}$$

se acerca siempre a 0. Veamos algunos caminos especiales de acercamiento.

Tomemos un vector $u \in \mathbb{R}^n$, de norma uno, es decir $\|u\| = 1$. Tal vector u nos indica una dirección. Aproximemosnos a p por esa dirección, es decir, usando $x = p + ru$, donde r se acerca a cero. Luego el límite anterior puede escribirse de la siguiente forma:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(p + ru) - f(p) - rDf(p)(u)}{|r|} = 0$$

lo cual es lo mismo a tener la existencia del siguiente límite:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(p + ru) - f(p)}{r} = Df(p)(u)$$

DEFINICIÓN 4.6. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $p \in \Omega$, donde Ω es un abierto de \mathbb{R}^n . El límite (en caso de existir)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(p + ru) - f(p)}{r}$$

es denotado por

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p)$$

y es llamado la derivada direccional de f en p en la dirección u .

Lo anterior nos permite observar el siguiente hecho.

COROLARIO 4.7. Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $p \in \mathbb{R}^n$, entonces para todo vector $u \in \mathbb{R}^n$, con $\|u\| = 1$, debe existir la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial u}(p)$.

DEFINICIÓN 4.8. Cuando usamos las direcciones canónicas $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (el valor 1 en la posición j -ésima), denotaremos la derivada direccional en la dirección e_j como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$$

y le llamaremos la derivada parcial de f en p en la dirección j -ésima.

COROLARIO 4.9. Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $p \in \mathbb{R}^n$, entonces para todo $j = 1, \dots, n$, debe existir la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$.

4.4. Situación Vectorial

En el caso que tenemos una función vectorial $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, cuyas funciones coordenadas son $f_1, \dots, f_m : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, entonces definimos la derivada direccional de f en p en la dirección de u como

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}(p), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial u}(p) \right)$$

y de manera análoga, su derivada parcial en la coordenada j -ésima como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(p), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(p) \right)$$

4.5. Pregunta natural

Hemos visto que una condición necesaria para la existencia de la diferencial de una función en un punto p es la existencia de todas las derivadas direccionales. Ahora la pregunta natural es:

Si existen las derivadas direccionales de f en el punto p , ¿podemos asegurar la diferenciabilidad de f en p ?

Los siguientes ejemplos indican que en general la respuesta a la pregunta anterior es negativa.

EJEMPLO 4.1.

(1) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & xy = 0 \\ 1, & xy \neq 0 \end{cases}$$

Entonces existen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$$

pero f al no ser continua en $(0, 0)$ no puede ser diferenciable en $(0, 0)$. Este ejemplo dice que la existencia de todas las derivadas parciales no asegura la existencia de la diferencial.

(2) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Para $u = (a, b)$, $a^2 + b^2 = 1$, se tiene que existe

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \begin{cases} \frac{b^2}{a} & a \neq 0 \\ 0 & a = 0 \end{cases}$$

pero como f no es continua en $(0, 0)$ tenemos que f no es diferenciable en $(0, 0)$. Este ejemplo dice que la existencia de todas las derivadas direccionales no asegura la existencia de la diferencial.

4.6. Jacobianas, Gradientes

Hemos visto en la sección anterior que la diferenciabilidad de una función no puede asegurarse si sólo sabemos que existen todas las derivadas direccionales.

¿Qué podemos hacer en el caso que tenemos la existencia de las derivadas direccionales, o inclusive menos, si sólo hemos deducido la existencia de las derivadas parciales (menos cantidad de cálculos)?

Intentemos buscar que forma debería tener $Df(p)$ en caso de existir. Sabemos que $Df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función lineal. Podemos preguntarnos por la forma que tiene. Para esto, basta con calcular la matriz asociada a ella en las bases canónicas $B_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ para \mathbb{R}^n y $B_m = \{e_1, \dots, e_m\}$ para \mathbb{R}^m , la cual denotaremos por

$$\text{Jac } f(p) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

que es una matriz de tamaño $m \times n$. Veamos que valor es a_{ij} . Para esto, recordemos que para calcular la matriz asociada $M(Df(p), B_n, B_m) = \text{Jac } f(p)$ basta mirar la

imágen $Df(p)(e_j)$ y calcular sus coordenadas en la base de llegada B_m . Pero

$$Df(p)(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(p), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(p) \right),$$

y como $B_m = \{e_1, \dots, e_m\}$, entonces obtenemos

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p).$$

DEFINICIÓN 4.10. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Supongamos que existen todas las derivadas parciales de f en un punto $p \in \Omega$. Entonces la matriz

$$Jac f(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix}$$

es llamada la matriz Jacobiana de f en el punto p . Cuando $m = 1$, entonces

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$$

es llamado el vector gradiente de f en p .

Todo lo anterior nos permite decir que forma debe tener la diferencial $Df(p)$ en caso que tengamos una función f que es diferenciable en un punto p .

TEOREMA 4.11. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Si f es diferenciable en el punto $p \in \Omega$, entonces

$$\begin{aligned} Df(p)(k_1, \dots, k_n) &= k_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + k_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = \\ &= Jac f(p) {}^t[k_1 \cdots k_n] \end{aligned}$$

Cuando $m = 1$, entonces tenemos que

$$Df(p)(k_1, \dots, k_n) = \langle \nabla f(p), (k_1, \dots, k_n) \rangle$$

Todo lo anterior nos permite hacer el siguiente resumen.

TEOREMA 4.12. Si tenemos una función

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

donde Ω es un conjunto abierto en \mathbb{R}^n , y tenemos un punto $p \in \Omega$, entonces:

- (1) f es diferenciable en p si y sólo si todas sus funciones coordenadas son diferenciables en p ;
- (2) Si f no es continua en p , entonces f no es diferenciable en p ;
- (3) Si f es continua en p , pero no existe alguna derivada parcial o derivada direccional, entonces f no es diferenciable en p ;

- (4) Si f es continua y posee todas las derivadas parciales, entonces la función lineal siguiente

$$L(k_1, \dots, k_n) = k_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + k_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)$$

es candidata a ser la diferencial de f en p . Si existe

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p) - L(x - p)}{\|x - p\|} = 0$$

entonces $L = Df(p)$.

Hay un caso particular en el que no es necesario verificar límites en caso de estar en la situación (3). Este es cuando todas las derivadas parciales son continuas en el punto p :

TEOREMA 4.13. Si tenemos una función

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

donde Ω es un conjunto abierto en \mathbb{R}^n , y tenemos un punto $p \in \Omega$, de manera que todas las derivadas parciales existen y son continuas en el punto p , entonces f es diferenciable en p .

EJEMPLO 4.2. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = e^{\sin(x)+y^2}$. Entonces existen las derivadas parciales en todo punto $p = (a, b)$ y estas son de la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \cos(a)e^{\sin(a)+b^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2be^{\sin(a)+b^2} \end{cases}$$

Las derivadas parciales son continuas en todo \mathbb{R}^2 y como consecuencia, f es diferenciable en \mathbb{R}^2 . En este caso,

$$Df(a, b)(u, v) = u \cos(a)e^{\sin(a)+b^2} + 2vbe^{\sin(a)+b^2}$$

4.7. Propiedades de funciones diferenciables

TEOREMA 4.14. Supongamos que tenemos $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funciones. Entonces, las propiedades algebraica de límites aseguran lo siguiente:

- (1) Si f y g son diferenciables en el punto p , entonces para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que $\alpha f + \beta g$ es diferenciable en p ; además,

$$D(\alpha f + \beta g)(p) = \alpha Df(p) + \beta Dg(p).$$

- (2) Si f y g son diferenciables en el punto p , entonces el producto interior $\langle f, g \rangle$ es diferenciable en p ; además,

$$D\langle f, g \rangle(p) = \langle g(p), Df(p) \rangle + \langle f(p), Dg(p) \rangle.$$

En este caso, cuando $m = 1$ estamos hablando del producto escalar.

- (3) Si $m = 1$, f , g son diferenciables en el punto p y $g(p) \neq 0$, entonces el cociente f/g es diferenciable en p ; más aún,

$$D(f/g)(p) = \frac{g(p)Df(p) - f(p)Dg(p)}{g(p)^2}.$$

(4) **Regla de la Cadena**

- (4.1) **Primera forma de la Regla de la Cadena:** Sea $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $f(p) \in (a, b)$, y supongamos que f es diferenciable en p entonces $h \circ f$ es también diferenciable en p . Más aún, se tiene la regla de la cadena:

$$D(h \circ f)(p)(u) = h'(Df(p)(u)) = h'(f(p))\langle \nabla f(p), u \rangle =$$

$$h'(f(p)) \left(u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right),$$

$$\text{donde } u = (u_1, \dots, u_n)$$

- (4.2) **Segunda forma de la Regla de la Cadena:** Sea $P : (a, b) \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ una función definida por

$$P(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

donde las funciones x_k son funciones derivables en $t = t_0$. Supongamos que $P(t_0) = p$. Entonces $f \circ P : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $t = t_0$; más aún, se tiene la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ P)}{dt}(t_0)(u) &= Df(p)(x'_1(t_0)u, \dots, x'_n(t_0)u) = \\ &= \left(x'_1(t_0) \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + x'_n(t_0) \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right) u \end{aligned}$$

- (4.3) **Forma general de la Regla de la Cadena:** Sean $P_1, \dots, P_n : W \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables en el punto $q \in W$ supongamos que $(P_1(q), \dots, P_n(q)) = p \in \Omega$. Entonces la función definida por $f(P_1(x), \dots, P_n(x))$ es diferenciable en q ; más aún, tenemos la regla de la cadena

$$\begin{aligned} Df(P_1, \dots, P_n)(q)(u) &= Df(p)(DP_1(u), \dots, DP_n(u)) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \left(\sum_{s=1}^k u_s \frac{\partial P_j}{\partial y_s}(q) \right) \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Los puntos (1) y (2) son consecuencia directa del álgebra de límites y el punto (3) es consecuencia de (4) usando $h(x) = 1/x$. Luego, la única parte que necesitamos verificar es la regla de la cadena, es decir parte (4). Para dar una idea, en (4.1) debemos considerar la fracción

$$\frac{h(f(x)) - h(f(p)) - h'(f(p))Df(p)(x - p)}{\|x - p\|} \quad (*)$$

cuando x se acerca a p . Pero,

$$\frac{h(f(x)) - h(f(p))}{f(x) - f(p)}$$

se aproxima al valor $h'(f(p))$ ya que h es derivable en $f(p)$. Luego, la fracción (*) se aproxima al mismo valor donde se aproxima la fracción

$$\frac{h'(f(p))(f(x) - f(p)) - h'(f(p))Df(p)(x - p)}{\|x - p\|} = h'(f(p)) \left(\frac{f(x) - f(p) - Df(p)(x - p)}{\|x - p\|} \right),$$

la cual se aproxima a 0 ya que f diferenciable en p . \square

TAREA 4.4. Verificar la regla de la cadena (4).

EJEMPLO 4.3.

- 1.- Si $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ y $g(x, y) = xy$, entonces $g \circ f(t) = \cos(2\pi t) \sin(2\pi t)$. Entonces $(g \circ f)'(t) = -2\pi \cos(4\pi t)$. Usando la regla de la cadena, tenemos que

$$\text{Jac } f(t) = \begin{bmatrix} -2\pi \sin(2\pi t) \\ 2\pi \cos(2\pi t) \end{bmatrix} \quad \text{Jac } g(x, y) = [y \ x]$$

de lo cual obtenemos que

$$\text{Jac } g(f(t)) \text{Jac } f(t) = -2\pi \cos(4\pi t)$$

- 2.- Sea $f(x, y) = (x^2, y^2, xy)$ y $g(u, v, w) = u + v + w$. Entonces $g \circ f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$. En particular,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(a, b) = 2a + b = \\ & = \frac{\partial g}{\partial u}(a^2, b^2, ab) \frac{\partial x^2}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial g}{\partial v}(a^2, b^2, ab) \frac{\partial y^2}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial g}{\partial w}(a^2, b^2, ab) \frac{\partial xy}{\partial x}(a, b) \end{aligned}$$

TAREA 4.5.

- (1) Calcular las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial t}, \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial s}$$

para las funciones:

- (a) $f(x, y, z) = xyz$, $x(t, s) = t + s$, $y(t, s) = ts$, $z(t, s) = \cos(ts)$;
 (b) $f(x, y) = \text{Log}(x^2 + y^2)$, $(x, y) \neq (0, 0)$, $x(t, s) = e^{t+s}$, $y(t, s) = 1 + t + s + ts$.

- (2) Sea $u(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$, donde f es función real que posee todas las derivadas parciales continuas. Verificar que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

- (3) Sea $u(x, t) = f(x + kt)$, donde f es función real derivable. Verificar que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(4) Sea $f(x, y)$ una función real diferenciable y consideremos las formas polares

$$x = x(r, \theta) = r \cos(\theta), \quad y = y(r, \theta) = r \sin(\theta)$$

Expresar las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

en función de las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

(5) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable y sea $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Verificar la igualdad

$$\|\nabla(f \circ g)(a, b, c)\|^2 = 4(f'(a^2 + b^2 + c^2))^2 g(a, b, c)$$

EJEMPLO 4.4. Algunas funciones $f(x_1, \dots, x_n)$ tienen la propiedad de homogeneidad, es decir, existe un valor entero $r > 0$ tal que para cualquier valor $\lambda \in \mathbb{R}$ vale la igualdad

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, \dots, x_n)$$

Decimos que f es homogénea de grado r . Si sabemos que f es diferenciable, entonces podemos derivar respecto a la variable λ para obtener (usando la regla de la cadena) la igualdad

$$\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = r \lambda^{r-1} f(x_1, \dots, x_n)$$

Haciendo $\lambda = 1$, obtenemos la igualdad

$$\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = r f(x_1, \dots, x_n)$$

Una consecuencia directa de la regla de la cadena es la extensión del teorema del valor medio en una variable a varias variables como sigue. Dado dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^n$, el trazo determinado por ellos es

$$[p, q] = \{\lambda q + (1 - \lambda)p : \lambda \in [0, 1]\}$$

y sus puntos interiores son

$$(p, q) = \{\lambda q + (1 - \lambda)p : \lambda \in (0, 1)\}$$

TEOREMA 4.15 (Teorema del Valor Medio). Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $p, q \in \Omega$ son tales que el trazo $[p, q] \subset \Omega$, entonces existe algún $z \in (p, q)$ tal que

$$f(q) - f(p) = Df(z)(q - p) = \langle \nabla f(z), q - p \rangle$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la función real $g(t) = f \circ h(t)$, donde $h(t) = tq + (1 - t)p$. Entonces, por la regla de la cadena tenemos que g es derivable en $(0, 1)$ y es claramente continua en $[0, 1]$. Usando el teorema del valor medio para g , tenemos que existe $t_0 \in (0, 1)$ de manera que

$$g(1) - g(0) = g'(t_0)$$

Pero $g(1) = f(q)$, $g(0) = f(p)$ y, otra vez por la regla de la cadena, $g'(t_0) = Df(z)(q - p)$, donde $z = h(t_0)$. \square

4.8. Derivadas Parciales de Orden Superior

Consideremos una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde Ω es algún subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Supongamos que existe la derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$$

en cada punto $x \in \Omega$. Entonces, podemos considerar la función

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$$

DEFINICIÓN 4.16. Si existe la derivada parcial de la función

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$$

en la dirección j -ésima en el punto $p \in \Omega$, entonces diremos que existe la derivada parcial de segunda orden de f en p , denotada por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(p)$$

EJEMPLO 4.5. Si $f(x, y) = \sin(xy)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos(xy)$$

Luego,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \cos(xy) - xy \sin(xy)$$

De manera natural podemos definir las derivadas parciales de orden superior. Generalmente usaremos la notación

$$\frac{\partial^r f}{\partial x^r}$$

para indicar la derivada parcial de orden r obtenida usando sólo la coordenada x .

TAREA 4.6. Sea $f(x, y) = \int_0^x \sqrt{y+z} dz$. Determinar su derivadas parciales de segundo orden (donde existan).

EJEMPLO 4.6. sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Entonces tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Además tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \end{aligned}$$

lo que dice que las derivadas parciales de primer orden son continuas en todo punto del plano. Pero,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \quad \text{!!!!}$$

El ejemplo anterior nos está diciendo que no siempre las derivadas parciales en cualquier orden dan lo mismo. El siguiente resultado asegura cuando este tipo de problemas no ocurre.

TEOREMA 4.17. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función tales que existen y son continuas las siguientes:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Entonces existe

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$$

y se tiene que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}.$$

4.9. Valores Regulares y Críticos

Consideremos una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable, donde Ω es algún conjunto abierto de \mathbb{R}^n . Sea $p \in \Omega$. Entonces tenemos la función lineal

$$Df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

cuya matriz asociada en las bases canónicas es la matriz Jacobiana

$$\text{Jac } f(p)$$

DEFINICIÓN 4.18. *Diremos que p es un punto regular de f si $Df(p)$ es una función sobreyectiva, es decir,*

$$Df(p)(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$$

o, equivalentemente, que el rango de la matriz Jacobiana $\text{Jac } f(p)$ es m . En caso que p no sea un punto regular, diremos que este es un punto crítico de f .

TEOREMA 4.19. *Si $m = 1$, entonces p es punto regular de f si y sólo si alguna de las derivadas parciales en p no se anula, equivalentemente, $\nabla f(p) \neq (0, \dots, 0)$.*

DEMOSTRACIÓN. En este caso $\text{Jac } f(p)$ es una matriz de tamaño $1 \times n$. Esta tiene rango $m = 1$ si y sólo si al menos una de las coordenadas no sea 0. \square

TEOREMA 4.20. *si $m > n$, entonces f no posee puntos regulares. Más aún, p es punto regular de f si y sólo si $\dim(\text{Ker}(Df(p))) = n - m$.*

DEMOSTRACIÓN. El resultado sale de la igualdad

$$n = \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\text{Ker}(Df(p))) + \dim(\text{Im}(Df(p)))$$

de donde vemos que $\dim(\text{Im}(Df(p))) \leq n$. \square

DEFINICIÓN 4.21. *Un punto $q \in \mathbb{R}^m$ es llamado un valor regular de f si $f^{-1}(q)$ sólo contiene puntos regulares. En caso contrario, decimos que q es un valor crítico.*

EJEMPLO 4.7. *Si $f^{-1}(q) = \emptyset$, entonces q es valor regular, En efecto, si fuese un valor crítico, entonces deberíamos tener un punto crítico de f en $f^{-1}(q)$ lo cual es imposible al ser este vacío.*

EJEMPLO 4.8. *Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Entonces*

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$$

De aquí vemos que el único punto crítico es $(0, 0, 0)$. En particular, 0 es valor crítico y todo punto $q \in \mathbb{R} - \{0\}$ es valor regular.

4.10. Planos Tangentes, Normales

Consideremos una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable, donde Ω es algún conjunto abierto de \mathbb{R}^n . Podemos considerar las superficies de nivel $f^{-1}(q)$, $q \in \mathbb{R}^m$. Supongamos que $f^{-1}(q) \neq \emptyset$.

DEFINICIÓN 4.22. *Bajo las condiciones anteriores, sea $p \in f^{-1}(q)$. El espacio tangente de $f^{-1}(q)$ en el punto p es dado por el conjunto de todas las posibles velocidades que se pueden obtener en p cuando nos movemos en la superficie de nivel $f^{-1}(q)$, y es denotado por $T_p f^{-1}(q)$.*

TEOREMA 4.23. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en el punto p . El espacio tangente $T_p f^{-1}(q)$, donde $q = f(p)$, es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n .*

DEMOSTRACIÓN. Es claro de la definición que $T_p f^{-1}(q) \subset \mathbb{R}^n$. Para obtener $T_p f^{-1}(q)$, debemos considerar todos los posibles caminos diferenciables $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que $\gamma(t) \in f^{-1}(q)$, para todo $t \in (-1, 1)$, y $\gamma(0) = p$. Ya que (i) $(\gamma_1 + \gamma_2)' = \gamma_1' + \gamma_2'$ y (ii) $(\lambda\gamma)' = \lambda\gamma'$, obtenemos nuestro resultado. \square

TEOREMA 4.24. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en el punto p , y sea $q = f(p)$. Entonces $T_p f^{-1}(q) \subset \text{Ker}(Df(p))$.*

DEMOSTRACIÓN. consideremos un camino diferenciable $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(t) \in f^{-1}(q)$, para todo $t \in (-1, 1)$, y $\gamma(0) = p$. Entonces lo que estamos buscando es determinar el vector velocidad $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n$. Consideremos la función

$h = f \circ \gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^m$, la cual es diferenciable pues es la función constante $h(t) = q$. Usando la regla de la cadena obtenemos

$$0 = Dh(t) = Df(\gamma(t)) \circ D\gamma(t)$$

o equivalentemente

$$0 = \text{Jac } h(t) = \text{Jac } f(\gamma(t)) \text{Jac } \gamma(t)$$

Poniendo $t = 0$ obtenemos que el vector velocidad $\gamma'(0)$ vive en el núcleo de $Df(p)$, es decir,

$$T_p f^{-1}(q) \subset \text{Ker}(Df(p))$$

□

TEOREMA 4.25. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en el punto p , y sea $q = f(p)$. Si p es un punto regular de f , entonces*

$$T_p f^{-1}(q) = \text{Ker}(Df(p)) = \{v \in \mathbb{R}^n : Df(p)(v) = 0\},$$

en particular, $\dim_{\mathbb{R}} T_p f^{-1}(q) = n - m$.

En el caso particular que $m = 1$, lo anterior dice que el espacio tangente $T_p f^{-1}(q)$ es el espacio de vectores ortogonales al vector gradiente $\nabla f(p)$, es decir:

$$T_p f^{-1}(q) = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla f(p), v \rangle = 0\}$$

EJEMPLO 4.9. *Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Como el único punto crítico de f es $(0, 0, 0)$, podemos calcular $T_p f^{-1}(q)$ para cualquier $p \neq (0, 0, 0)$. Si $p = (a, b, c) \in f^{-1}(q)$, entonces*

$$T_p f^{-1}(q) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : \langle (2a, 2b, -2c), (u, v, w) \rangle = 0\}$$

Por ejemplo, si tomamos $q = -1$, entonces $f^{-1}(-1)$ está compuesto de dos paraboloides. Si $p = (a, b, c) \in f^{-1}(-1)$, entonces $c \neq 0$. Luego,

$$\begin{aligned} T_p f^{-1}(-1) &= \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : \langle au + bv - cw = 0\} = \\ &= \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : w = \frac{a}{c}u + \frac{b}{c}v\} = \langle (c, 0, a), (0, c, b) \rangle \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 4.3. ¿Qué pasa en los puntos críticos? *Para simplificar la situación pensemos en el caso $m = 1$. Supongamos que p es un punto crítico para la función f (en el ejemplo anterior $p = (0, 0, 0)$). En este caso tenemos que el vector gradiente $\nabla f(p) = (0, 0, 0)$ y luego el núcleo de la diferencial $Df(p)$ es todo \mathbb{R}^3 (el espacio vectorial formado por todos los vectores ortogonales a $\nabla f(p)$). Ahora, miremos la superficie de nivel de f a la cual pertenece el punto p . En el ejemplo anterior esta es $f^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$ es decir un cono con vértice en $(0, 0, 0)$. En este caso se puede ver claramente que el espacio tangente sólo está formado del vector $(0, 0, 0)$.*

4.10.1. Caso $m = 1$. Volvamos al caso $m = 1$ y p un punto regular para una función diferenciable

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Por lo visto hasta ahora, podemos calcular el espacio vectorial de todos los vectores tangentes a $S = f^{-1}(q)$, donde $q = f(p)$, siendo este el espacio tangente $T_p S$.

Como ya habíamos observado, este espacio es exactamente el espacio formado por aquellos vectores ortogonales al vector gradiente $\nabla f(p)$. Esto está diciendo, de manera particular, que todo vector ortogonal a $T_p S$ es un múltiplo de $\nabla f(p)$, es decir un vector en el espacio vectorial de dimensión uno generado por el vector $\nabla f(p)$. Ahora, esto nos permite calcular la recta ortogonal a S por el punto p . En efecto, esta recta debe ser

$$\begin{aligned} L_p &= \{\lambda \nabla f(p) + p : \lambda \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = a + \frac{\partial f}{\partial x}(p), \quad y = b + \frac{\partial f}{\partial y}(p), \quad z = c + \frac{\partial f}{\partial z}(p)\} \end{aligned}$$

donde $p = (a, b, c)$

EJEMPLO 4.10. Consideremos la función diferenciable $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y, z) = (x-1)^2 + yz$. Entonces $\nabla f(a, b, c) = (2(a-1), c, b)$. Así, el único punto singular de f es el punto $(1, 0, 0)$. Supongamos entonces que $(a, b, c) \neq (1, 0, 0)$. Este punto (a, b, c) pertenece a una única superficie de nivel de f , en este caso a

$$S = f^{-1}((a-1)^2 + bc) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + yz = (a-1)^2 + bc\}$$

El vector $\nabla f(a, b, c) = (2(a-1), c, b)$ es entonces un vector ortogonal al espacio tangente $T_{(a,b,c)} S$. Luego la recta tangente a S en el punto (a, b, c) es dada por

$$\begin{aligned} L &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = a + 2(a-1) = 3a-2, \quad y = b+c, \quad z = c+b\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z, \quad x = 3a-2\} \end{aligned}$$

4.11. Propiedad Geométrica del Gradiente

En la sección anterior ya vimos que una manera de interpretar el gradiente de una función en un punto regular es por medio de espacios tangentes: el gradiente es normal al espacio tangente. A continuación daremos otra interpretación de este por medio de crecimiento de la función f .

Consideremos una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que sea diferenciable en $p \in \Omega$. Por cada dirección $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = 1$, uno tiene asignado al punto $p \in \Omega$ un número, la derivada direccional de f en p en la dirección de u , $\frac{\partial f}{\partial u}(p)$.

Supongamos que queremos saber en que dirección crece más rápido la función f cuando estamos inicialmente parados en el punto p . Para ver esto, basta ver la función

$$g_u(t) = f(p + tu),$$

donde $t \in \mathbb{R}$ se acerca a cero y $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = 1$, es una dirección. Usando la regla de la cadena y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos que

$$\begin{aligned} g'_u(0) &= Df(p)(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(p) = \langle \nabla f(p), u \rangle \leq \\ &\leq \|u\| \|\nabla f(p)\| = \|\nabla f(p)\| \end{aligned}$$

Ahora, si p es punto crítico, entonces no podemos dar una respuesta a nuestra pregunta. Pero si p es un punto regular, entonces tenemos por lo anterior que

$$\begin{aligned} g'_u(0) &\leq \|\nabla f(p)\| = \langle \nabla f(p), \nabla f(p) / \|\nabla f(p)\| \rangle = \\ &= g'_v(0) \quad \text{para } v = \nabla f(p) / \|\nabla f(p)\| \end{aligned}$$

TEOREMA 4.26. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $p \in \Omega$. La dirección donde f crece más rápido es en la dirección que da el gradiente*

$$\nabla f(p) / \|\nabla f(p)\|$$

OBSERVACIÓN 4.4. *El resultado anterior puede usarse para obtener maximización de algunos procesos modelados por una función real.*

4.12. Máximos y Mínimos

DEFINICIÓN 4.27. *Consideremos una función $f : \Sigma \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (la cual no asumiremos por el momento si es continua o no).*

- 1.- *Un punto $p \in \Sigma$ es llamado un mínimo local de f en el conjunto Σ si existe un pequeño entorno $B_r(p)$ tal que $f(p) \leq f(x)$ para todo $x \in B_r \cap \Sigma$.*
- 2.- *Un punto $p \in \Sigma$ es llamado un máximo local de f en el conjunto Σ si existe un pequeño entorno $B_r(p)$ tal que $f(p) \geq f(x)$ para todo $x \in B_r \cap \Sigma$.*
- 3.- *Un mínimo global de f en el conjunto Σ es un punto $p \in \Sigma$ para el cual vale que $f(p) \leq f(x)$ para todo $x \in \Sigma$.*
- 4.- *Un máximo global de f en el conjunto Σ es un punto $p \in \Sigma$ para el cual vale que $f(p) \geq f(x)$ para todo $x \in \Sigma$.*
- 5.- *Un punto $p \in \Sigma$ es llamado un punto crítico de f en el conjunto Σ si $f'(p) = 0$.*

TAREA 4.7. *Verificar que todo mínimo global (respectivamente, máximo global) es un mínimo local (respectivamente, máximo local).*

El siguiente resultado fué visto en el curso de cálculo en una variable.

TEOREMA 4.28. *Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable y $p \in (a, b)$ un máximo local ó mínimo local, entonces $f'(p) = 0$, es decir, p era un punto crítico para la función f .*

DEMOSTRACIÓN. Veamos esto para el caso en que p es un máximo global. La idea es que para que p sea un máximo local, entonces $f(p) \geq f(x)$ para todo $x \in (a, b)$ muy cercano a p , digamos $|x - p| < r$, para cierto $r > 0$. Esto dice que

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \begin{cases} \leq 0, & \text{si } x > p, |x - p| < r \\ \geq 0, & \text{si } x < p, |x - p| < r \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} f'(p) &= \lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0 \\ f'(p) &= \lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0 \end{aligned}$$

asegurando que

$$f'(p) = 0$$

□

TAREA 4.8.

- 1.- Hacer la demostración para el caso en que p es un mínimo local.
- 2.- Dar un ejemplo donde $f'(p) = 0$ pero donde p no es mínimo ó máximo local. ¿Qué puede deducir de esto?

Veamos ahora la situación $n \geq 2$.

TEOREMA 4.29. Si $p \in \Omega$ es un máximo local ó mínimo local de una función diferenciable $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, entonces todas las derivadas direccionales en p se anulan. En particular, todas las derivadas parciales en p se anulan, es decir, p resulta ser un punto crítico de f .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que tenemos una función diferenciable $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que $p \in \Omega$ es un mínimo local ó un máximo local. Entonces tenemos un cierto $r > 0$ de manera que

$$\begin{cases} f(p) \leq f(x), & \text{cuando } x \in B_r(p), \text{ si } p \text{ es mínimo local} \\ f(p) \geq f(x), & \text{cuando } x \in B_r(p), \text{ si } p \text{ es máximo local} \end{cases}$$

Ahora, tomemos una dirección cualquiera $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = 1$. Calcular la derivada direccional

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p)$$

es lo mismo que calcular la derivada de la función real

$$g_u : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R} : g_u(t) = p + tu$$

en el punto $t = 0$. La Regla de la cadena nos dice en efecto que

$$g'_u(0) = Df(g_u(0))(\gamma'(0)),$$

donde

$$\gamma : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}^n : \gamma(t) = p + tu$$

Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = Df(p)(u) = Df(g_u(0))(\gamma'(0)) = g'_u(0)$$

Por otro lado, el punto p es máximo local para f si y sólo si 0 es máximo local para g_u . Idem, p es mínimo local para f si y sólo si 0 es mínimo local para g_u . Pero ya vimos que en esta caso $g'_u(0) = 0$, lo cual asegura de las igualdades anteriores que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = 0$$

□

EJEMPLO 4.11. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$. Entonces, $\nabla f(a, b) = (2a, -2b)$. Así, el único punto crítico es $(0, 0)$. Como tenemos que $f(0, 0) = 0$, entonces vemos que $0 \in \mathbb{R}$ es el único valor crítico de f . Si escogemos puntos de la forma $(x, 0) \neq (0, 0)$, tenemos que $f(x, 0) > 0 = f(0, 0)$, lo cual dice que $(0, 0)$ no puede ser máximo local. Por otro lado, si escogemos puntos de la forma $(0, y) \neq (0, 0)$, tenemos que $f(0, y) < 0 = f(0, 0)$ lo cual dice que tampoco $(0, 0)$ puede ser un mínimo local. Este ejemplo nos está diciendo que si bien máximos y mínimos locales son puntos críticos de la función, no todos los puntos críticos son necesariamente máximos ó mínimos locales.

TAREA 4.9.

- 1.- Determinar si las funciones siguientes tienen máximos y/o mínimos locales (determinarlos en caso de existir):
 - (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
 - (b) $f(x, y) = y^2 - x^3$
 - (c) $f(x, y) = y^2 - x(x - 1)(x - 2)$
- 2.- Determinar la distancia mínima entre el punto $(0, b)$ y la parábola $x^2 - 4y = 0$

Supongamos que tenemos un punto crítico p para nuestra función f . El ejemplo visto anteriormente nos dice que no podemos decir si p es un máximo ó mínimo local para f .

En la asignatura de cálculo en una variable se vió el siguiente resultado.

TEOREMA 4.30. Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es dos veces derivable, con la segunda derivada continua, $p \in (a, b)$, $f'(p) = 0$, entonces:

- 1.- Si $f''(p) > 0$, entonces p es mínimo local;
- 2.- Si $f''(p) < 0$, entonces p es máximo local;
- 3.- Si $f''(p) = 0$, entonces no podemos asegurar nada.

Lo anterior nos permite conjeturar que algo similar debemos tener para el caso de varias variables ($n \geq 2$). Esto es correcto, y procedemos a ver esto a continuación.

DEFINICIÓN 4.31. Supongamos que tenemos una función diferenciable $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, y $p \in \Omega$. Supongamos además que existen las segundas derivadas parciales p . La matriz

$$\text{Hess } f(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{bmatrix}$$

es llamada la matriz Hessiana de f en el punto p .

TEOREMA 4.32 (Criterio del Hessiano). *Supongamos que tenemos una función diferenciable $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, y $p \in \Omega$ es un punto crítico. Supongamos que existen y son continuas las segundas derivadas parciales en Ω . Para cada $k = 1, \dots, n$, consideremos la matriz $A_k(p)$ (de tamaño $k \times k$) que se obtiene de $\text{Hess } f(p)$ al eliminar las filas y columnas $k+1, k+2, \dots, n$. En el caso que $\text{Det}[\text{Hess } f(p)] \neq 0$, tenemos las siguientes:*

- 1.- Si $\text{Det}[A_k(p)] > 0$, para $k = 1, \dots, n$, entonces p es un mínimo local para f ;
- 2.- Si

$$\text{Det}[A_k(p)] \begin{cases} < 0, & \text{para } k \text{ impar} \\ > 0, & \text{para } k \text{ par} \end{cases}$$

entonces p es un máximo local para f .

EJEMPLO 4.12. Sea $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ están fijos. En este caso, los puntos críticos de f son dados por aquellos puntos $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz Hessiana es en este caso

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{bmatrix}$$

La condición $\text{Det}[\text{Hess } f(p)] \neq 0$ es entonces equivalente a decir

$$ac - b^2 \neq 0$$

lo cual dice que el único punto crítico es $p = (0, 0)$. En esta situación, tenemos que

- 1.- Si $a > 0$, $ac - b^2 > 0$, entonces $(0, 0)$ es un mínimo local;
- 2.- Si $a < 0$, $ac - b^2 > 0$, entonces $(0, 0)$ es una máximo local.

Miremos los siguientes casos particulares:

- (a) $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$; tenemos $a > 0$ y $ac - b^2 < 0$. Pero en el ejemplo anterior vimos que el único punto crítico $(0, 0)$ no es máximo local y tampoco es mínimo local.
- (b) $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$; tenemos $a < 0$ y $ac - b^2 < 0$. Pero al igual que en el caso anterior el único punto crítico $(0, 0)$ no es máximo local y tampoco es mínimo local.

Los dos casos anteriores nos dicen que en los casos no considerados en el criterio del Hessiano no es posible decir nada.

EJEMPLO 4.13. Sea $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$, donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ están fijos. En este caso, los puntos críticos de f son dados por aquellos puntos $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz Hessiana es en este caso

$$\text{Hess } f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2a & 2d & 2e \\ 2d & 2b & 2f \\ 2e & 2f & 2c \end{bmatrix}$$

La condición $\text{Det}[\text{Hess } f(p)] \neq 0$ es entonces equivalente a decir $abc + 2def - af^2 - be^2 - cd^2 \neq 0$, lo cual dice que el único punto crítico es $p = (0, 0, 0)$. En esta situación, tenemos que

- 1.- Si $a > 0$, $ab - d^2 > 0$, $abc + 2def - af^2 - be^2 - cd^2 > 0$ entonces $(0, 0, 0)$ es un mínimo local;
- 2.- Si $a < 0$, $ab - d^2 > 0$, $abc + 2def - af^2 - be^2 - cd^2 < 0$ entonces $(0, 0, 0)$ es una máximo local.

4.13. Máximos y Mínimos sobre Regiones Compactas

En la sección anterior consideramos el problema de máximos y mínimos locales de funciones reales definidas sobre regiones abiertas $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Nuestra pregunta natural es:

¿Cómo determinar máximos y/o mínimos locales de funciones reales definidas sobre subconjuntos de \mathbb{R}^n que no son conjuntos abiertos?

En esta sección sólo nos ocuparemos en subconjuntos compactos de \mathbb{R}^n , es decir, que son cerrados y acotados. El resultado principal en esta situación es el siguiente:

TEOREMA 4.33. Sean $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $f : \Sigma \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existen máximos globales y mínimos globales para f en Σ .

El resultado anterior da la existencia de máximos globales y mínimos globales, pero no indican donde puedan estar. Denotemos por $\Omega \subset \Sigma$ el conjunto de puntos de Σ que son el centro de alguna bola abierta completamente contenida en Σ (es conjunto es llamado el interior de Σ). Entonces Ω resulta ser un abierto de \mathbb{R}^n . Si nuestra función resulta ser diferenciable en Ω , entonces podemos usar las técnicas aprendidas en la sección anterior para determinar máximos y mínimos locales en Ω . Una vez hecho esto, podemos estudiar nuestra función en el borde de Σ , es decir, en $\Sigma - \Omega$. Por supuesto, tal estudio dependerá de que tan complicado es este borde.

EJEMPLO 4.14. Sea $f(x, y) = x^2 - y^2$ definida en

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

En este caso

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

y el borde es

$$\Sigma - \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Ahora, como f es diferenciable en Ω , podemos usar las técnicas anteriores. El único punto crítico de f es $(0, 0)$. Tenemos que $f(0, 0) = 0$. Es claro que $(0, 0)$ no puede ser ni máximo ni mínimo local (como ya habíamos verificado en un ejemplo anterior). Como Σ es compacto (verificarlo), el resultado principal dice que en Σ existen máximos y mínimos globales. Por lo dicho anteriormente, tales puntos deben estar en el borde $\Sigma - \Omega$. Para analizar f en este borde, basta considerar las funciones

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

$$g = f \circ h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- 1.- $h(t) \in \Sigma - \Omega$, para todo $t \in \mathbb{R}$ y, reciprocamente, todo punto de $\Sigma - \Omega$ es de la forma $h(t)$ para algún $t \in \mathbb{R}$;
- 2.- $t \in \mathbb{R}$ es máximo local (respectivamente, mínimo local) de g si y sólo si $h(t)$ es máximo local (respectivamente, mínimo local) de f .

Ahora, para localizar los máximos y mínimos locales de g , usamos lo aprendido en cálculo de una variable: (a) buscar primero sus puntos críticos; (b) determinar su tipo. En este caso, los puntos críticos de g son aquellos valores $t \in \mathbb{R}$ que satisfacen

$$Df(h(t))(h'(t)) = 0$$

en otras palabras,

$$\langle (2 \cos(t), -2 \sin(t)), (-\sin(t), \cos(t)) \rangle = -4 \cos(t) \sin(t) = 0$$

Esto nos dice que $t \in \{k\pi, \pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Cuando $t = k\pi$, entonces $h(t) = (\pm 1, 0)$ y luego $f(\pm 1, 0) = 1$. Cuando $t = \pi/2 + k\pi$, entonces $h(t) = (0, \pm 1)$ y luego $f(0, \pm 1) = -1$. Como resultado obtenemos que hay exactamente dos máximos globales, siendo estos $(\pm 1, 0)$, y hay exactamente dos mínimos globales, siendo estos $(0, \pm 1)$.

4.14. El Método de los Multiplicadores de Lagrange

En esta sección nos preocuparemos de ver como obtener valores extremos de funciones diferenciables con restricciones. Este tipo de problemas es el que necesitamos resolver para atacar problemas de máximos y/o mínimos de la sección anterior en el borde de una región. Para precisar esto, consideremos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4.15. ¿Cuál es la distancia mínima del punto $(0, 0, 0)$ a la superficie $x^2 + y^3 - 3z^5 - 1$? Una manera de tratar de resolver esto es considerar la función distancia desde el punto $(0, 0, 0)$ a un punto (x, y, z) y buscar el mínimo (en caso de existir) cuando (x, y, z) se restringe a la superficie $x^2 + y - 3z - 1$. ¿Cómo hacemos esto?

Para poder responder a lo anterior, tratemos de usar lo ya aprendido. Por un lado tenemos una función diferenciable

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

la cual queremos minimizar/maximizar cuando nos restringimos $x \in \Omega$ a ciertas condiciones, las cuales podemos interpretar como una colección finita

$$\begin{cases} g_1(x) = 0 \\ g_2(x) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x) = 0 \end{cases}$$

donde $g_1, \dots, g_k : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables.

EJEMPLO 4.16. En nuestra pregunta anterior dada en el ejemplo 4.15 tenemos

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbb{R}^3 \\ f(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

$$k = 1$$

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y - 3z - 1$$

Volviendo a nuestra situación general. Supongamos que

$$p \in g_1^{-1}(0) \cap g_2^{-1}(0) \cap \cdots \cap g_k^{-1}(0)$$

es un máximo ó mínimo local de $f(x)$ restringida a las condiciones

$$g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_k(x) = 0$$

Queremos saber si esto obliga a que p tenga alguna propiedad interesante que sea fácil de obtener (recordar la condición de ser punto crítico en los casos ya estudiados sin restricciones).

Por otro lado, podemos preguntarnos por el conjunto \mathcal{L} de todas las direcciones ortogonales en p al conjunto

$$g_1^{-1}(0) \cap g_2^{-1}(0) \cap \cdots \cap g_k^{-1}(0)$$

Supongamos que p es valor regular de cada función g_j , $j = 1, \dots, k$. Como $p \in g_j^{-1}(0)$, tenemos que $\nabla g_j(p)$ es una dirección ortogonal a la superficie de nivel $g_j^{-1}(0)$, $j = 1, \dots, k$. Luego,

$$\nabla g_j(p) \in \mathcal{L}, \quad \text{para cada } j = 1, \dots, k.$$

En particular, el espacio vectorial generado por los vectores $\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_k(p)$, está contenido en \mathcal{L} .

En este punto, debemos observar que podría ocurrir que aún no obtengamos todos los vectores ortogonales como se puede ver del siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4.17. *Supongamos $k = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $g_1(x, y) = y - x^2$, $g_2(x, y) = y + x^2$. En este caso, $g_1^{-1}(0) \cap g_2^{-1}(0) = \{(0, 0)\}$. Luego, $\mathcal{L} = \mathbb{R}^2$. Pero $\nabla g_1(0, 0) = (0, 1) = \nabla g_2(0, 0)$. Es claro que $\mathcal{L} = \mathbb{R}^2$ no es igual al espacio vectorial generado por $\nabla g_1(0, 0)$ y $\nabla g_2(0, 0)$.*

Nuestra pregunta natural es:

¿Cuándo podemos decir que \mathcal{L} es exactamente el espacio vectorial generado por los vectores $\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_k(p)$?

El siguiente resultado nos da respuesta a la pregunta anterior.

TEOREMA 4.34. *Sean*

$$g_j : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, k,$$

funciones diferenciables. Si $p \in \Omega$ es un punto regular de la función vectorial $g = (g_1, \dots, g_k)$, entonces tenemos que el espacio vectorial generado por los vectores $\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_k(p)$ corresponde a todos los vectores ortogonales en el punto de

$$g_1^{-1}(0) \cap g_2^{-1}(0) \cap \cdots \cap g_k^{-1}(0)$$

Hasta ahora no hemos utilizado nuestra función f , de la cual queremos obtener información para que p sea un máximo/mínimo local, al restringirnos a las condiciones anteriores. Para hacer esto, consideremos un camino diferenciable

$$\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

de manera que

$$\gamma(t) \in g_1^{-1}(0) \cap g_2^{-1}(0) \cap \cdots \cap g_k^{-1}(0), \quad \gamma(0) = p.$$

Lo que estamos haciendo es considerar las posibles velocidades al pasar por el punto p cuando nos movemos en la intersección anterior. Consideremos la función $h = f \circ \gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, la cual, por la regla de la cadena, es diferenciable y

$$h'(0) = Df(p)(\gamma'(0)) = \langle \nabla f(p), \gamma'(0) \rangle$$

Ahora, tenemos que $h = f \circ \gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un máximo/mínimo local en $t = 0$, ya que f lo tiene en p cuando nos restringimos a $g_1^{-1}(0) \cap g_2^{-1}(0) \cap \cdots \cap g_k^{-1}(0)$, por lo cual debemos tener que $h'(0) = 0$. Esto nos dice que $\nabla f(p)$ es ortogonal a $g_1^{-1}(0) \cap g_2^{-1}(0) \cap \cdots \cap g_k^{-1}(0)$ en el punto p , es decir, vive en el espacio vectorial generado por $\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_k(p)$, en particular, debemos tener la existencia de números reales

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

tales que

$$\nabla f(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \lambda_2 \nabla g_2(p) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(p)$$

Los números $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ anteriores son llamados los *multiplicadores de Lagrange* para nuestro problema. En resumen, tenemos lo siguiente:

TEOREMA 4.35 (Método de los Multiplicadores de Lagrange). *Supongamos que tenemos una función diferenciable*

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

la cual queremos minimizar/maximizar cuando nos restringimos $x \in \Omega$ a las condiciones

$$\begin{cases} g_1(x) = 0 \\ g_2(x) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x) = 0 \end{cases}$$

donde $g_1, \dots, g_k : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son también funciones diferenciables. Si $0 \in \mathbb{R}$ es valor regular de (g_1, \dots, g_k) y $p \in \Omega$ es máximo/mínimo local de f restricto a las condiciones $g_1(p) = g_2(p) = \cdots = g_k(p) = 0$, entonces deben existir números reales $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ satisfaciendo

$$\nabla f(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \lambda_2 \nabla g_2(p) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(p)$$

EJEMPLO 4.18. *En el ejemplo 4.15 tenemos*

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbb{R}^3, \\ f(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ k &= 1, \\ g_1(x, y, z) &= x^2 + y - 3z - 1. \end{aligned}$$

Como $\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 1, -3)$, es claro entonces que $0 \in \mathbb{R}$ es valor regular de g_1 , ya que no hay puntos críticos para g_1 . Como $k = 1$ la función g es la misma función g_1 .

Por otro lado, observemos que maximizar/minimizar la función f es lo mismo que maximizar/minimizar la función $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Luego, basta que trabajemos con F .

Lo que tenemos que hacer es ver si existen $p = (a, b, c) \in g_1^{-1}(0)$ y un número $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla F(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p)$$

ó equivalentemente

$$\begin{cases} (2a, 2b, 2c) = \lambda_1(2a, 1, -3) \\ a^2 + b - 3c - 1 = 0 \end{cases}$$

Sabemos que $p = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, luego $a \neq 0$ ó $b \neq 0$ ó $c \neq 0$. Supongamos que $a \neq 0$, entonces $\lambda_1 = 1$, $b = 1/2$ y $c = -3/2$. Pero en este caso $a^2 + b - 3c = a^2 + 5 \neq 1$. Luego, debemos tener $a = 0$. En este caso, si $b \neq 0$, debemos tener $p = (0, 1/10, -3/10)$. En caso $b = 0$, tenemos que $p = (0, 0, -1/3)$. Luego, tenemos dos candidatos para minimizar la distancia entre $(0, 0, 0)$ y $g^{-1}(0)$. Pero $F(0, 1/10, -3/10) = 1/10 < 1/9 = F(0, 0, -1/3)$. Así, nos quedamos con un sólo candidato, $p = (0, 1/10, -3/10)$. Ahora, nuestro problema es saber si nuestro candidato sirve o no!!!

4.15. Fórmula de Taylor

En Cálculo de una variable se vió la fórmula de Taylor para funciones reales de una variable real. Lo que este resultado dice en forma ruda es que toda función con derivadas de orden superior puede aproximarse por un polinomio (su polinomio de Taylor). Obviamente, esto no es cierto del todo como ya sabemos. Es necesario que el error tienda a cero. Esto ocurre para las funciones que llamamos real analíticas. Pero con la función $f(t) = 0$ para $t \leq 0$ y $f(t) = e^{-1/t^2}$ para $t > 0$, tenemos que su desarrollo de Taylor en el punto 0 da idénticamente 0!!!

TEOREMA 4.36 (Fórmula de Taylor). *Consideremos una función*

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

donde Ω es un subconjunto abierto del espacio \mathbb{R}^n . Supongamos que existen y son continuas todas las derivadas parciales de orden R de esta función f . Sean $p, q \in \Omega$ puntos tales que

$$[p, q] = \{p + \lambda(q - p) : \lambda \in [0, 1]\} \subset \Omega$$

Entonces es posible encontrar un punto

$$x_0 \in (p, q) = \{p + \lambda(q - p) : \lambda \in (0, 1)\}$$

tal que valga la siguiente igualdad:

$$f(p) = f(q) + \sum_{k=1}^{R-1} \frac{1}{k!} d^k f(p; q - p) + \frac{1}{R!} d^R f(x_0; q - p)$$

donde

$$d^k f(p; u) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k f(p) u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_k}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}$$

DEMOSTRACIÓN. Para ver esto, consideremos la función

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \lambda \mapsto f(p + \lambda(q - p))$$

Esta función es continua y en el intervalo $(0, 1)$ es continuamente derivable. Podemos usar el teorema del valor medio aprendido en Cálculo de una variable a esta función para obtener

$$g(1) = g(0) + \sum_{k=1}^{R-1} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} g(p) + \frac{1}{R!} \frac{d^R}{d\lambda^R} g(\lambda_0)$$

donde $\lambda_0 \in (0, 1)$ es algún punto adecuado. Como $g(0) = f(p)$, $g(1) = f(q)$ y podemos escribir las derivadas de g en términos de las derivadas parciales de f , por la regla de la cadena, el resultado deseado se obtiene al reemplazar en la fórmula de Taylor para g . \square

EJEMPLO 4.19. Consideremos la función

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + xy^2$$

y hagamos su desarrollo de Taylor en torno al punto $p = (1, 2)$. Como

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + 2xy \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y + 2x \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) = 6 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) = 2 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) = 6 \end{array} \right.$$

y las derivadas parciales de orden mayor o igual a 4 son nulas, tenemos en este caso que

$$f(x, y) = 13 + 7(x - 1) + 16(y - 2) + 3(x - 1)^2 + 4(x - 1)(y - 2) + 7(y - 2)^2 + (x - 1)^3 + (x - 1)(y - 2)^2 + (y - 2)^3$$

4.16. Teorema de la función Inversa

En Cálculo de una variable se vió que dada una función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ que era continuamente derivable y dado un punto $c \in (a, b)$ con $f'(c) \neq 0$, entonces f tiene una inversa local cerca de c . De manera más precisa,

TEOREMA 4.37. *Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente derivable y un punto $c \in (a, b)$ con $f'(c) \neq 0$, entonces existen intervalos abiertos U y V tales que $c \in U \subset (a, b)$, $f(U) = V$, y existe una función continuamente derivable $g : V \rightarrow U$ que es inversa de f , es decir, $g \circ f(t) = t$ para todo $t \in V$.*

En el caso de más variables, tenemos un resultado equivalente.

TEOREMA 4.38 (Teorema de la Función Inversa). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con primeras derivadas parciales continuas en Ω . Sea $p \in \Omega$ con $\text{Det}(\text{Jac } f(p)) \neq 0$, entonces existen conjuntos abiertos $U \subset \Omega$ y V tales que $p \in U$, $f(U) = V$, y existe una función $g : V \rightarrow U$, con derivadas parciales de primer orden continuas en V , que es inversa de f , es decir, $g \circ f(y) = y$ para todo $y \in V$.*

EJEMPLO 4.20. *Sea $f(x, y) = e^x(\cos(y), \sin(y))$. Entonces tenemos que sus derivadas parciales son continuas en todo el plano $\mathbb{R}^2 = \Omega$. El determinante de su Jacobiana en el punto (x, y) es $\text{Det}(\text{Jac } f(x, y)) = e^{2x} > 0$. Luego, el teorema de la función inversa asegura que f puede ser invertida localmente. Pero vemos que esta función no es globalmente invertible ya que*

$$f(x, y) = f(x, y + 2k\pi)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Ahora, sea $p = (x_0, y_0)$ y escojamos $a \in \mathbb{R}$ de manera que $a < y < a + 2\pi$ (hay infinitas elecciones para a). Entonces podemos escoger

$$U = \mathbb{R} \times (a, a + 2\pi)$$

$$V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} : \text{argumento de } (u, v) \neq a + 2k\pi\}$$

Entonces

$$g(u, v) = (\ln \sqrt{u^2 + v^2}, \text{Arg}_a(u, v))$$

donde $\text{Arg}_a(u, v) \in (a, a + 2\pi)$ es el argumento del par (u, v) en tal rango de valores.

4.17. Teorema de la función Implícita

El siguiente resultado tiene varias aplicaciones, tantas algebraicas como geométricas.

TEOREMA 4.39 (Teorema de la Función Implícita). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+n}$ un abierto y sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ con primeras derivadas parciales continuas en Ω . Sea $p = (a_1, \dots, a_{m+n}) \in \Omega$ tal que $f(p) = 0$ y*

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix} \neq 0,$$

entonces es posible encontrar un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $(a_{m+1}, \dots, a_{m+n}) \in U$, y una única función $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con derivadas parciales de primer orden continuas en U , y tal que

$$(i) \phi(a_{m+1}, \dots, a_{m+n}) = (a_1, \dots, a_m) \text{ y } (ii) f(\phi(y), y) = 0$$

para todo $y \in U$.

Una aplicación algebraica de este resultado es el siguiente. Supongamos que tenemos un sistema de m ecuaciones en $m + n$ variables desconocidas:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_{m+n}) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_{m+n}) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_{m+n}) = 0 \end{cases}$$

Supongamos que $(0, \dots, 0 \in \mathbb{R}^m$ resulta ser un valor regular para la función $F = (f_1, \dots, f_m)$. Entonces el teorema de la función implícita nos asegura que podemos determinar m de esas variables desconocidas en términos de las otras n . Observemos que es esto exactamente lo que vemos en el caso de sistemas lineales, donde la matriz jacobiana corresponde a la matriz del sistema lineal (Tarea).

Una aplicación geométrica es que la preimágen $S = f^{-1}(q)$ de un valor regular q de una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable (con derivadas parciales de primer orden continuas) luce localmente como el gráfico de una función diferenciable $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida en algún abierto U .

CAPÍTULO 5

CURVAS

5.1. Parametrización de curvas

DEFINICIÓN 5.1. Una parametrización de curva en \mathbb{R}^n es una función

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

donde I es un intervalo en \mathbb{R} . Las funciones reales

$$x_1, \dots, x_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

son llamadas las componentes de la parametrización α . La imagen $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^n$ es llamada una curva en \mathbb{R}^n .

OBSERVACIÓN 5.1. Una misma curva puede tener varias parametrizaciones diferentes.

EJEMPLO 5.1. Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (4 \cos(t), -3 \sin(t)).$$

En este caso, $x(t) = 4 \cos(t)$, $y(t) = -3 \sin(t)$. Tenemos que

$$\left(\frac{x(t)}{4}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{-3}\right)^2 = 1,$$

es decir, que la curva plana $\alpha(t)$ está contenida en la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

La parametrización α enrolla \mathbb{R} sobre la elipse anterior con un número infinito de vueltas.

DEFINICIÓN 5.2. Consideremos una parametrización de curva

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

- (i) Diremos que α es continua en t si cada una de las funciones coordenadas x_j es continua en t . Si α es continua en todo punto de I , entonces diremos que α es continua.

- (ii) Diremos que α es derivable en t si cada una de las funciones coordenadas x_j es derivable en t . Si α es derivable en todo punto de I , entonces diremos que α es derivable. En este caso, el vector

$$v_\alpha(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t)),$$

es llamado el vector velocidad de la parametrización α en el punto t . La rapidez de la parametrización α es

$$r_\alpha(t) = \|v_\alpha(t)\| = \sqrt{(x'_1(t))^2 + \dots + (x'_n(t))^2}.$$

Cuando para cada $t \in I$ tenemos que $v_\alpha(t) \neq (0, \dots, 0)$, es decir, rapidez no cero, diremos que la parametrización es regular.

- (iii) Diremos que α es k veces derivable en t si cada una de las funciones coordenadas x_j es k veces derivable en t . Si α es 2 veces derivable en el punto $t \in I$, entonces diremos que el vector

$$a_\alpha(t) = (x''_1(t), \dots, x''_n(t)),$$

es el vector aceleración de la parametrización α en el punto t .

EJEMPLO 5.2. La parametrización

$$\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (t \cos(t), t \sin(t), t),$$

tiene velocidad y aceleración dadas por

$$v_\Theta(t) = (\cos(t) - t \sin(t), \sin(t) + t \cos(t), 1),$$

$$a_\Theta(t) = (-2 \sin(t) - t \cos(t), 2 \cos(t) - t \sin(t), 0).$$

En particular, Θ es una parametrización regular. Observe que la curva $\Theta(\mathbb{R})$ está contenida en el cono $x^2 + y^2 = z^2$.

TAREA 5.1. Graficar las curvas parametrizadas por las siguientes funciones y determinar velocidad y aceleración de ellas. Determine si son regulares.

- (i) $\tau : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (\cos(t), \ln(t), \sin(t))$.
(ii) $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (t, 3 \sin(2t), t)$.
(iii) $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (5 \sin^3(t), 5 \cos^3(t), t)$.

OBSERVACIÓN 5.2. En el caso planar se estila la notación:

$$\hat{i} = (1, 0), \hat{j} = (0, 1).$$

Así, uno puede escribir $(a, b) = a\hat{i} + b\hat{j}$. De manera similar, en el caso espacial se estila la notación

$$\hat{i} = (1, 0, 0), \hat{j} = (0, 1, 0), \hat{k} = (0, 0, 1).$$

Usando estas notaciones, uno puede escribir una parametrización espacial (o planar) como $\alpha(t) = x_1(t)\hat{i} + x_2(t)\hat{j} + x_3(t)\hat{k}$.

5.2. Integración de Curvas

Dada una parametrización continua

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

definimos la integral

$$\int_a^b \alpha(t) dt = \left(\int_a^b x_1(t) dt, \dots, \int_a^b x_n(t) dt \right).$$

EJEMPLO 5.3.

$$\int_0^1 (\sin(\pi t), 6t^2 + 4t) dt = \left(\frac{2}{\pi}, 4 \right).$$

TAREA 5.2. Determine la parametrización de curva $\alpha(t)$ si sabemos que su aceleración es $a_\alpha(t) = (6t, 12t + 2, e^t)$, su posición y velocidad en $t = 0$ son dadas por $v_\alpha(0) = (2, 0, 1)$ y $\alpha(0) = (0, 3, 5)$.

TAREA 5.3. Un proyectil se lanza con rapidez inicial de 140 metros por segundo desde el nivel del piso, formando un ángulo de $\pi/4$ con la horizontal. Suponiendo que la única fuerza que actúa sobre este proyectil es la gravedad, encontrar la altura máxima, el alcance horizontal y la rapidez del proyectil al momento de impacto. Ind: Use la segunda ley de Newton: $F(t) = \text{masa } a_\alpha(t)$ y el hecho que $F(t) = (0, -g)$.

5.3. Reparametrización de curvas

DEFINICIÓN 5.3. Sean $I, J \subset \mathbb{R}$ dos intervalos. Una función

$$h : I \rightarrow J$$

es llamada un cambio de parámetro si se tiene que $h'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ (en particular, h es biyectiva, continua y derivable). Ya que I es un intervalo, debemos tener que para un cambio de parámetros h hay dos posibilidades:

- (i) $h'(t) > 0$ para todo $t \in I$, en cuyo caso diremos que el cambio de parámetros es positivo, ó bien
- (ii) $h'(t) < 0$ para todo $t \in I$, en cuyo caso diremos que el cambio de parámetros es negativo.

EJEMPLO 5.4. La función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto t^3$ no es cambio de parámetro ya que $h'(0) = 0$.

DEFINICIÓN 5.4. Consideremos una parametrización de curva

$$\alpha : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

y un cambio de parámetro $h : I \rightarrow J$. Entonces, la nueva parametrización de curva

$$\beta = \alpha \circ h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : \tau \mapsto \beta(\tau) = \alpha(h(\tau)),$$

es llamada una reparametrización de α .

OBSERVACIÓN 5.3. *De la definición anterior, observe que una reparametrización define la misma curva. Pero, si el cambio de parámetros es negativo, la nueva parametrización recorre la curva de manera opuesta.*

EJEMPLO 5.5. *Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$. La parametrización α describe un círculo de radio 1 centrado en el origen recorriéndolo de manera opuesta a las manecillas del reloj. Si consideremos el cambio de parámetro negativo $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto t = -u$, entonces la reparametrización $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : u \mapsto (\cos(-u), \sin(-u))$ describe un círculo de radio 1 centrado en el origen recorriéndolo de manera opuesta al anterior.*

5.4. Relación de velocidades para reparametrizaciones

Consideremos una parametrización de curva

$$\alpha : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto \alpha(t),$$

un cambio de parámetro

$$h : I \rightarrow J : \tau \mapsto t = h(\tau)$$

y la reparametrización de curva

$$\beta = \alpha \circ h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : \tau \mapsto \beta(\tau) = \alpha(h(\tau)).$$

Usando la regla de la cadena, podemos relacionar las velocidades de estas dos parametrizaciones como:

$$\frac{d\beta}{d\tau}(\tau) = \frac{dh}{d\tau}(\tau) \frac{d\alpha}{dt}(h(\tau)),$$

es decir,

$$v_\beta(\tau) = \frac{dh}{d\tau}(\tau) v_\alpha(h(\tau)).$$

5.5. Longitud de arco

Consideremos una parametrización continua

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Por cada partición de $[a, b]$, digamos

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b\},$$

podemos considerar la curva poligonal

$$\alpha_P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definida como $\alpha_P([t_{j-1}, t_j])$ siendo el arco de recta conectando los puntos $\alpha(t_{j-1})$ y $\alpha(t_j)$. La longitud de tal curva poligonal es dada por

$$L(\alpha, P) = \sum_{j=1}^k \|\alpha(t_{j-1}) - \alpha(t_j)\|.$$

Observemos que si agregamos más puntos a la partición P , obtenemos una nueva partición Q . Usando la desigualdad triangular podemos ver que

$$L(\alpha, P) \leq L(\alpha, Q).$$

Definimos la *longitud de la parametrización* α como

$$l(\alpha) = \text{Supremo}\{L(\alpha, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}.$$

OBSERVACIÓN 5.4. *Puede ocurrir que* $l(\alpha) = +\infty$.

TAREA 5.4. *Construya un ejemplo* $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ *continuo con longitud infinita.*

5.6. Caso de parametrizaciones diferenciables

Cuando tenemos una parametrización

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

donde las funciones coordenadas x_j son todas con derivada continua (decimos que α es continuamente derivable), entonces la velocidad es una función continua. Como consecuencia del teorema del valor intermedio, podemos obtener que

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du = \int_a^b \sqrt{(x_1'(u))^2 + \dots + (x_n'(u))^2} du.$$

EJEMPLO 5.6. *Consideremos la parametrización continuamente derivable* $\alpha : [1, T] \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (2t, \ln(t), t^2)$. *En este caso,*

$$v_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\| = \frac{2t^2 + 1}{t}.$$

Luego,

$$l(\alpha) = \int_1^T \frac{2u^2 + 1}{u} du = (u^2 + \ln(u))\Big|_{u=1}^{u=T} = T^2 + \ln(T) - 1.$$

5.7. Longitud de arco y reparametrizaciones

Consideremos una parametrización de curva continuamente derivable

$$\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto \alpha(t),$$

un cambio de parámetro

$$h : [c, d] \rightarrow [a, b] : \tau \mapsto t = h(\tau)$$

que sea continuamente derivable. Entonces la reparametrización de curva

$$\beta = \alpha \circ h : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : \tau \mapsto \beta(\tau) = \alpha(h(\tau)),$$

sigue siendo continuamente derivable y, como habíamos visto anteriormente,

$$\frac{d\beta}{d\tau}(\tau) = \frac{dh}{d\tau}(\tau) \frac{d\alpha}{dt}(h(\tau)).$$

En este caso tenemos, usando cambio de variable para integración, que:

$$l(\beta) = \int_c^d \|\beta'(\tau)\| d\tau = \int_c^d \|\alpha'(h(\tau))\| |h'(\tau)| d\tau =$$

$$= \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(v)\| (-1)^k du,$$

donde $k = 0$ si h es cambio de parámetros positiva y $k = 1$ en caso contrario. Luego

$$l(\beta) = l(\alpha).$$

5.8. Parámetro de longitud de arco

Consideremos una parametrización de curva continuamente derivable y regular

$$\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto \alpha(t).$$

En este caso, para cada valor $t \in [a, b]$ podemos calcular

$$s(t) = l(\alpha([a, t])) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du,$$

la longitud del trayecto desde el momento a hasta el momento t . Esto nos dá una función

$$s : [a, b] \rightarrow [0, l(\alpha)] : t \mapsto s = s(t).$$

Tenemos que la función s es derivable y

$$\frac{ds}{dt}(t) = \|\alpha'(t)\|.$$

Como hemos supuesto que α es parametrización regular, tenemos que $\|\alpha'(t)\| > 0$, para cada $t \in [a, b]$, luego tenemos que

$$s : [a, b] \rightarrow [0, l(\alpha)] : t \mapsto s = s(t)$$

es de hecho un cambio de parámetros positivo. El parámetro $s = s(t)$ es llamado el *parámetro de longitud de arco*.

Denotemos por

$$t : [0, l(\alpha)] \rightarrow [a, b] : t \mapsto t = t(s)$$

la función inversa de s . Entonces tenemos que

$$\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\|\alpha'(t(s))\|}.$$

La reparametrización

$$\beta = \alpha \circ t : [0, l(\alpha)] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es llamada la *reparametrización por longitud de arco*.

Observemos que

$$\frac{d\beta}{ds}(s) = \frac{d(\alpha \circ t)}{ds}(s) = \frac{d\alpha}{dt}(t(s)) \frac{dt}{ds}(s) = \frac{\alpha'(t(s))}{\|\alpha'(t(s))\|} = T_\alpha(t(s)),$$

donde $'$ denota derivación respecto al parámetro t . En particular, tenemos que

$$\left\| \frac{d\beta}{ds}(s) \right\| = 1,$$

es decir, la reparametrización por longitud de arco es de rapidez constante unitaria.

5.8.1. Tangente unitario. El vector unitario

$$T_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{d\beta}{ds}(s(t)) = T_\beta(s(t))$$

es llamado el *vector tangente unitario* de la parametrización α en el punto t .

TAREA 5.5. Verifique que cualquier otra reparametrización de α posee el mismo vector tangente unitario.

5.8.2. Normal unitario. Como tenemos que

$$\left\| \frac{d\beta}{ds}(s) \right\| = 1,$$

vemos que al volver a derivar respecto al parámetro de arco s obtenemos que

$$\frac{d\beta}{ds}(s) \cdot \frac{d^2\beta}{ds^2}(s) = 0,$$

es decir, $\frac{d\beta}{ds}(s)$ es ortogonal con $\frac{d^2\beta}{ds^2}(s)$. De esta manera, obtenemos de manera natural un vector ortogonal al movimiento de la curva. El vector

$$N_\alpha(t) = N_\beta(s(t)) = \frac{\frac{d\beta}{ds}(s(t))}{\left\| \frac{d\beta}{ds}(s(t)) \right\|}$$

es llamado el *vector unitario normal* a α en la posición $\alpha(t)$. Usando integración por partes podemos escribir este vector en términos de α :

$$\begin{aligned} N_\alpha(t) &= \frac{\alpha''(t)\|\alpha'(t)\|^2 - \alpha'(t)(\alpha''(t) \cdot \alpha'(t))}{\|\alpha''(t)\|\alpha'(t)\|^2 - \alpha'(t)(\alpha''(t) \cdot \alpha'(t))\|} \\ &= \frac{a_\alpha(t)\|v_\alpha(t)\|^2 - v_\alpha(t)(a_\alpha(t) \cdot v_\alpha(t))}{\|a_\alpha(t)\|v_\alpha(t)\|^2 - v_\alpha(t)(a_\alpha(t) \cdot v_\alpha(t))\|}. \end{aligned}$$

TAREA 5.6. Si tenemos una parametrización regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, entonces por cada $t \in [a, b]$ tenemos el sistema de coordenadas $S_t = \{T_\alpha(t), N_\alpha(t)\}$. Considere $\alpha(t) = (e^{-t} \cos(t), e^{-t} \sin(t))$, con $t \in I = \mathbb{R}$. Calcule las coordenadas de $(0, 0)$ en términos del sistema S_t . Sea $\gamma(t) = (t, \sin(t))$. Escriba $\gamma(t)$ en términos de S_t .

5.9. Curvas espaciales: triedro móvil

Consideremos una parametrización regular en \mathbb{R}^3

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Tenemos, por cada $t \in I$, el par de vectores normales unitarios

$$T_\alpha(t), N_\alpha(t).$$

Podemos obtener un tercer vector unitario, que es normal a los dos anteriores por

$$B_\alpha(t) = T_\alpha(t) \times N_\alpha(t)$$

llamado el *vector binormal unitario* de α en el punto $\alpha(t)$.

TAREA 5.7. Si tenemos una parametrización regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces por cada $t \in [a, b]$ tenemos el sistema de coordenadas $S_t = \{T_\alpha(t), N_\alpha(t), N_\alpha(t)\}$. Considere $\alpha(t) = (e^{-t} \cos(t), e^{-t} \sin(t), t)$, con $t \in I = \mathbb{R}$. Calcule las coordenadas de $(0, 0, 0)$ en términos del sistema S_t . Sea $\gamma(t) = (t, \sin(t), e^t)$. Escriba $\gamma(t)$ en términos de S_t .

5.10. Curvatura

Consideremos una parametrización regular en \mathbb{R}^n

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Sea $\beta = \alpha \circ t : [0, l(\alpha)] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la reparametrización por longitud de arco. La curvatura de la parametrización α en el punto $\alpha(t)$ es definido como

$$k_\alpha(t) = \left\| \frac{d^2\beta}{ds^2}(s(t)) \right\| = \frac{\|\alpha''(t)\|\alpha'(t)\|^2 - \alpha'(t) \cdot (\alpha''(t) \cdot \alpha'(t))}{\|\alpha'(t)\|^4}.$$

EJEMPLO 5.7.

- 1.- Sea $\alpha(t) = (at + b, ct + d, et + f)$, para $t \in \mathbb{R}$. Esta parametrización es regular si $(a, c, e) \neq (0, 0, 0)$ y $\alpha(\mathbb{R})$ es una recta que pasa por los puntos (b, d, f) y $(a + b, c + d, e + f)$. En este caso,

$$k_\alpha(t) = 0.$$

- 2.- Sean $r > 0$ y $\Theta(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, para $t \in \mathbb{R}$. Esta parametrización es regular y $\Theta(\mathbb{R})$ es un círculo de radio r centrado en el origen. En este caso tenemos

$$k_\Theta(t) = \frac{1}{r}.$$

- 3.- Sea $\eta(t) = (2 \sin(t), 2 \cos(t), 4t)$, para $t \in \mathbb{R}$. Esta parametrización es regular con rapidez constante $2\sqrt{5}$. La curva $\eta(\mathbb{R})$ está enrollada en el cilindro $x^2 + y^2 = 4$. En este caso tenemos que

$$k_\eta(t) = \frac{1}{10}.$$

TAREA 5.8.

- 1.- Verificar que para parametrizaciones regulares $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ vale que

$$k_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\|v_\alpha(t) \times a_\alpha(t)\|}{\|v_\alpha(t)\|^3}.$$

- 2.- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable y considere la parametrización de su gráfica dada por

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, f(t)).$$

Verifique que

$$k_\alpha(t) = \frac{|f'(t)|}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}$$

Calcule para $f(t) = e^{t^2}$.

- 3.- Verifique que la curvatura en $\theta = 0$ de la curva polar dada por $r = \phi(\theta)$ es dada por

$$k = \frac{2}{|\phi'(0)|}$$

- 4.- Verifique que para una parametrización regular

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

vale que

$$\alpha''(t) = \left(\frac{-\|\alpha'(t)\|^4}{\alpha'(t) \cdot \alpha''(t)} \right) T_\alpha(t) + \|\alpha'(t)\|^2 k_\alpha(t) N_\alpha(t).$$

- 5.- Sea dada una parametrización regular

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

- (a) la torsión de la curva α en el punto t es dada por

$$\tau_\alpha(t) = \left\| \frac{dB_\alpha}{ds}(s(t)) \right\|.$$

Verificar que

$$\tau_\alpha(t) = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}$$

- (b) Verificar que

$$B_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}$$

$$k_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

- (c) Verificar las fórmulas de Frenet:

$$\begin{cases} T'_\alpha &= \|\alpha'\| k_\alpha N_\alpha \\ N'_\alpha &= -\|\alpha'\| k_\alpha T_\alpha + \|\alpha'\| \tau_\alpha B_\alpha \\ B'_\alpha &= -\|\alpha'\| \tau_\alpha N_\alpha \end{cases}$$

- (d) Concluir de lo anterior que toda curva en el espacio es determinada módulo traslaciones por su rapidez, curvatura y torsión.

- 6.- Calcular la curvatura y torsión de $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$.

INTEGRACION MULTIPLE

6.1. La Noción Rústica de Integral

Motivación: Consideremos un subconjunto cerrado y acotado $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$, donde en cada punto $x \in \mathcal{R}$ tenemos una densidad dada por $f(x)$, $f: \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función real. ¿Cuál es la masa total de \mathcal{R} ?

OBSERVACIÓN 6.1. Cuando $f(x) \equiv 1$, es decir, en cada punto de \mathcal{R} la densidad de masa es 1, entonces la masa total es el volumen n -dimensional de \mathcal{R} . Si $n = 1$ hablamos de longitud de arco; si $n = 2$ hablamos de área; y si $n = 3$, entonces hablamos de volumen.

6.1.1. Cubos n -Dimensionales y sus Volúmenes. Los cubos n -dimensionales son por definición conjuntos de la forma

$$\mathcal{Q} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Un cubo n -dimensional de lado $r > 0$ centrado en el punto $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ es por definición el conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_r(p) &= [p_1 - \frac{r}{2}, p_1 + \frac{r}{2}] \times [p_2 - \frac{r}{2}, p_2 + \frac{r}{2}] \times \cdots \times [p_n - \frac{r}{2}, p_n + \frac{r}{2}] \\ &= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_j - p_j| \leq \frac{r}{2}, j = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Dos cubos \mathcal{Q}_1 y \mathcal{Q}_2 los llamaremos *esencialmente disjuntos* si a lo más tienen puntos comunes en sus bordes. En particular, dos cubos disjuntos son esencialmente disjuntos.

Ejercicio. Verificar que para todo cubo n -dimensional \mathcal{Q} existen un número finito de valores positivos r_1, \dots, r_k y puntos p^1, \dots, p^k , tal que \mathcal{Q} es unión de cubos esencialmente disjuntos de la forma $\mathcal{Q}_{r_1}(p^1), \dots, \mathcal{Q}_{r_k}(p^k)$.

Definimos el *volumen del cubo* \mathcal{Q} como el valor

$$\text{Vol}_n(\mathcal{Q}) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

En particular, el volumen de un cubo n -dimensional $\mathcal{Q}_r(p)$ es dado por

$$\text{Vol}_n(\mathcal{Q}_r(p)) = r^n.$$

Supongamos que tenemos cubos n -dimensionales $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_k$ que son dos a dos esencialmente disjuntos. Entonces definimos el volumen de su unión como:

$$\text{Vol}_n(\cup_{j=1}^k \mathcal{Q}_j) = \sum_{j=1}^k \text{Vol}_n(\mathcal{Q}_j)$$

6.1.2. Una Respuesta Parcial. Si en nuestra pregunta motivadora tenemos que $\mathcal{R} = \mathcal{Q}_r(p)$ y $f(x) \equiv c$, entonces podemos dar una respuesta fácil. En efecto, en este caso la respuesta es:

$$\text{Masa total de } \mathcal{R} = c \text{Vol}_n(\mathcal{Q}_r(p)) = cr^n.$$

OBSERVACIÓN 6.2. Si tenemos que $f(x) \equiv c \leq 0$, entonces podemos definir la masa total de \mathcal{R} de la misma manera anterior. Observamos que en este caso podemos tener masa total negativa (antimateria?).

De hecho, si \mathcal{R} es unión finita de cubos n -dimensionales dos a dos esencialmente disjuntos $\mathcal{Q}_{r_1}(p^1), \dots, \mathcal{Q}_{r_k}(p^k)$, y tenemos que f restringida al cubo $\mathcal{Q}_{r_j}(p^j)$ es constante igual a c_j , entonces

$$\text{Masa total de } \mathcal{R} = \sum_{j=1}^k c_j \text{Vol}_n(\mathcal{Q}_{r_j}(p^j)) = \sum_{j=1}^k c_j r_j^n.$$

Ejercicio. si \mathcal{R} es unión finita de cubos n -dimensionales dos a dos esencialmente disjuntos $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_k$, y tenemos que f restringida al cubo \mathcal{Q}_j es constante igual a c_j , entonces verificar que:

$$\text{Masa total de } \mathcal{R} = \sum_{j=1}^k c_j \text{Vol}_n(\mathcal{Q}_j).$$

6.1.3. Complicando Un Poco la Región. Supongamos ahora que la región \mathcal{R} es unión infinita numerable de cubos esencialmente disjuntos, pero manteniendo la región acotada; digamos que

$$\mathcal{R} = \cup_{j=1}^{\infty} \mathcal{Q}_j$$

donde \mathcal{Q}_i y \mathcal{Q}_k son esencialmente disjuntos si $i \neq j$.

Podemos definir el volumen de \mathcal{R} como la suma (infinita)

$$\text{Vol}_n(\mathcal{R}) = \sum_{j=1}^{\infty} \text{Vol}_n(\mathcal{Q}_j)$$

Como existe $M > 0$ tal que $\mathcal{R} \subset B_M(0)$, la cual tiene volumen finito, tenemos que la serie anterior es convergente.

Supongamos ahora que nuestra función f es igual a una constante c_j sobre el cubo \mathcal{Q}_j . Entonces podríamos definir

$$\text{Masa total de } \mathcal{R} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \text{Vol}_n(\mathcal{Q}_j).$$

Debemos observar que la serie anterior podría diverger. Una manera de asegurar convergencia de esta serie sería pedir que $|f(x)| \leq A$, donde $A > 0$. De hecho, en este caso la serie anterior estará acotada por $A \text{Vol}_n(B_M(0))$.

6.1.4. Situación Más Complicada: Integral Múltiple. Veamos ahora que pasa para la situación más complicada, tanto como para la región \mathcal{R} (la cual asumiremos acotada) como para la función $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la cual también asumiremos acotada por lo dicho anteriormente. Luego, supondremos desde ahora en adelante en esta sección que existen valores $R > 0$, $M > 0$ y $m < M$ tales que $\mathcal{R} \subset B_R(0)$ y $m \leq f(x) \leq M$.

Nuestra primera estrategia será el tratar de aproximar la región \mathcal{R} por una unión de cubos n -dimensionales esencialmente disjuntos dos a dos. Para hacer esto, tomemos $N > 0$ fijo y consideremos los cubos n -dimensionales

$$\mathcal{Q}_{\frac{1}{N}}(p),$$

donde $p \in \mathbb{R}^n$ recorre todos los puntos de la forma $(\frac{a_1}{N}, \dots, \frac{a_n}{N})$, con $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$.

Como \mathcal{R} es acotado, sólo existen un número finito de estos cubos que intersectan \mathcal{R} , digamos que estos son: $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_{l_N}$. La unión de estos cubos es una región que podemos pensar que es una *aproximación* de \mathcal{R} . Denotemos esta región como

$$\tilde{\mathcal{R}}_N = \mathcal{Q}_1 \cup \dots \cup \mathcal{Q}_{l_N}$$

Nuestra segunda estrategia es lo siguiente. Tomemos un punto $q^k \in \mathcal{R} \cap \mathcal{Q}_k$, $k = 1, \dots, l_N$. Ahora, sobre cada cubo \mathcal{Q}_k reemplazamos la función f por la función constante $f_k(x) \equiv f(q^k) = c_k$.

Ahora, podemos mirar la *aproximación* para la masa total de \mathcal{R} como la suma

$$M_N(\mathcal{R}) = \sum_{k=1}^{l_N} c_k \text{Vol}(\mathcal{Q}_k) = \sum_{k=1}^{l_N} c_k \frac{1}{N^n}$$

Pregunta Natural: ¿Qué tan buena es la *aproximación* hecha arriba?

Esta es la parte más difícil. La problemática se divide en dos partes:

- (1) ¿Cuándo podemos asegurar que si N tiende a $+\infty$, entonces $\tilde{\mathcal{R}}_N$ tiende a \mathcal{R} ?
- (2) Suponiendo que tenemos una respuesta positiva a la pregunta anterior, ¿existe $\lim_{N \rightarrow +\infty} M_N(\mathcal{R})$?

La pregunta (1) tiene la siguiente complicación de partida: ¿Qué significa que la región $\tilde{\mathcal{R}}_N$ tiende a \mathcal{R} ? Para evitar entrar en tecnicismos, supondremos que la región \mathcal{R} es una unión finita o numerable de cubos n -dimensionales $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots$, tal que $\mathcal{R} \subset B_R(0)$.

Por cada $N \in \{1, 2, 3, \dots\}$ dividimos \mathcal{Q}_j en N^n cubos n -dimensionales de igual tamaño. Luego cada uno de esos cubitos nuevos tiene volumen $\frac{\text{Vol}(\mathcal{Q}_j)}{N^n}$. Llamemos a estos nuevos cubitos por $\mathcal{Q}_j^1, \dots, \mathcal{Q}_j^{N^n}$. Sean

$$M_k = \text{Sup}_{\mathcal{Q}_j^k} f(x) \leq M$$

y

$$m_k = \text{Inf}_{\mathcal{Q}_j^k} f(x) \geq m.$$

Entonces miramos, por cada cubo \mathcal{Q}_j , la *suma superior de Riemann*

$$S(\mathcal{Q}_j, f, N) = \sum_{k=1}^{N^n} M_k \text{Vol}(\mathcal{Q}_j^k);$$

y la *suma inferior de Riemann*

$$s(\mathcal{Q}_j, f, N) = \sum_{k=1}^{N^n} m_k \text{Vol}(\mathcal{Q}_j^k).$$

Observemos que

$$\begin{aligned} S(Q_j, f, N) &\leq M \sum_{j=1}^{N^n} \text{Vol}(Q_j^k) \leq M \text{Vol}(Q_j) \\ s(Q_j, f, N) &\leq S(Q_j, f, N) \\ s(Q_j, f, N) &\geq m \sum_{j=1}^{N^n} \text{Vol}(Q_j) \end{aligned}$$

También es bueno observar que cuando N crece, entonces $S(Q_j, f, N)$ decrece y $s(Q_j, f, N)$ crece.

Más aún, si escogemos cualquier otro punto $p_{jk} \in Q_j^k$, entonces la suma de Riemann

$$S(Q_j, f, N, p_{jk}) = \sum_{k=1}^{N^n} f(p_{jk}) \text{Vol}(Q_j^k)$$

satisface que

$$s(Q_j, f, N) \leq S(Q_j, f, N, p_{jk}) \leq S(Q_j, f, N).$$

De lo anterior podemos ver que sólo necesitamos verificar si las dos sumas de Riemann $s(Q_j, f, N)$ y $S(Q_j, f, N)$ se acercan cuando N se acerca a ∞ , es decir, si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (S(Q_j, f, N) - s(Q_j, f, N)) = 0.$$

En caso de tener que el límite anterior es 0, entonces denotamos al valor de $\lim_{N \rightarrow \infty} S(Q_j, f, N)$ como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S(Q_j, f, N) = \int_{Q_j} f(x) dx = \int_{Q_j} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

y le llamamos la *integral* de f sobre Q_j .

OBSERVACIÓN 6.3. *Observemos que si la integral de f sobre \mathcal{R} existe, entonces los argumentos anteriores permiten verificar las desigualdades siguientes:*

(1) $m \text{Vol}(Q_j) \leq \int_{Q_j} f(x) dx \leq M \text{Vol}(Q_j)$.

(2) Si $|f(x)| \leq M$, entonces

$$\left| \int_{Q_j} f(x) dx \right| \leq M \text{Vol}(Q_j).$$

(3) De hecho, tenemos que

$$(3) \quad \left| \int_{Q_j} f(x) dx \right| \leq \int_{Q_j} |f(x)| dx.$$

Ahora, hecho esto con cada cubo Q_j y suponiendo que existe la integral de f sobre Q_j , podemos definir integral de f sobre la región \mathcal{R} como

$$\int_{\mathcal{R}} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_j \int_{Q_j} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

La desigualdad (2) de la observación 6.3 permite ver la convergencia de esta serie (en el caso de tener una cantidad infinita de cubos Q_j).

OBSERVACIÓN 6.4. *Como consecuencia de la definición anterior y la observación 6.3 obtenemos las desigualdades:*

$$(1) \quad mVol(\mathcal{R}) \leq \int_{\mathcal{R}} f(x)dx \leq MVol(\mathcal{R}).$$

(2) *Si $|f(x)| \leq M$, entonces*

$$\left| \int_{\mathcal{R}} f(x)dx \right| \leq MVol(\mathcal{R}).$$

$$(3) \quad \left| \int_{\mathcal{R}} f(x)dx \right| \leq \int_{\mathcal{R}} |f(x)|dx.$$

Observe que la definición de la integral de f sobre la región \mathcal{R} coincide con la definición de masa total definida en los ejemplos particulares dados en las dos subsecciones anteriores. Luego, la masa total de \mathcal{R} cuya densidad es dada por la función f es la integral de f sobre \mathcal{R} .

Pregunta Natural: ¿Cuándo podemos asegurar la existencia del límite anterior?

Si $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y \mathcal{R} es una región cerrada y acotada que se puede escribir como unión finita o infinita numerable de cubos n -dimensionales que son dos a dos esencialmente disjuntos, entonces se sabe que existe la integral

$$\int_{\mathcal{R}} f(x)dx.$$

OBSERVACIÓN 6.5 (Teorema del Valor Intermedio). *Supongamos que f es continua. La desigualdad (1) de la observación 6.3 nos dice que*

$$\int_{\mathcal{R}} f(x)dx \in [mVol(\mathcal{R}), MVol(\mathcal{R})],$$

donde

$$M = \text{Máximo}_{\mathcal{R}} f(x)$$

y

$$m = \text{Mínimo}_{\mathcal{R}} f(x).$$

Luego, existe un valor $c \in [m, M]$ tal que

$$\int_{\mathcal{R}} f(x)dx = cVol(\mathcal{R}).$$

Por el teorema del valor intermedio (ya que f es continua), existe un valor $x_0 \in \mathcal{R}$ tal que $f(x_0) = c$, en particular,

$$\int_{\mathcal{R}} f(x)dx = f(x_0)Vol(\mathcal{R}).$$

Una variación simple de lo anterior es cuando tenemos dos funciones f y g , ambas reales, definidas sobre la región \mathcal{R} e integrables sobre \mathcal{R} . Si f es continua, entonces usando argumentos similares a los anteriores, tenemos que existe un punto $x_0 \in \mathcal{R}$ tal que

$$\int_{\mathcal{R}} f(x)g(x)dx = f(x_0) \int_{\mathcal{R}} g(x)dx.$$

Ejercicio. Ver que regiones triangulares, discos y anillos son conjuntos del tipo mencionados arriba.

Se le puede pedir a f que tenga algunas discontinuidades y que \mathcal{R} sea un poco más general. Recomendamos los cursos de Análisis I, II de la ingeniería Civil Matemática. En esos cursos puede obtenerse el siguiente resultado.

TEOREMA 6.1. *Sea $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, donde \mathcal{R} es una región cerrada y acotada. Si el número de puntos donde f es discontinua es finito, entonces f es integrable sobre \mathcal{R} , es decir, existe $\int_{\mathcal{R}} f(x)dx$.*

En este punto es bueno indicar que el conjunto de puntos donde f puede ser discontinua y tal que f siga siendo integrable sobre \mathcal{R} no es necesariamente finita, este puede ser un conjunto infinito pero muy pequeño (contenido cero).

DEFINICIÓN 6.2. *Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto acotado. Para cada entero positivo L consideramos los cubos n -dimensionales de lado $1/L$ cuyos vértices son de la forma $(\frac{a_1}{L}, \dots, \frac{a_n}{L})$, donde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Sea R^L la unión de todos aquellos cubos que cortan a R . Entonces diremos que R tiene contenido cero si $\text{Vol}(R^L)$ tiende a 0 cuando L tiende a $+\infty$.*

TAREA 6.1. *Verificar que cuando $L > M$ (donde L y M son enteros positivos) vale que $\text{Vol}(R^L) \geq \text{Vol}(R^M)$. Concluir que el límite $\lim_{L \rightarrow +\infty} \text{Vol}(R^L)$ converge a un número no-negativo.*

DEFINICIÓN 6.3. *Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es llamado no muy complicado si el conjunto de puntos de su borde tiene contenido cero.*

TEOREMA 6.4. *Sea $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, donde \mathcal{R} es una región cerrada y acotada y no muy complicada. Si el número de puntos donde f es discontinua tiene contenido cero, entonces f es integrable sobre \mathcal{R} , es decir, existe $\int_{\mathcal{R}} f(x)dx$. Más aún, si \mathcal{Q} es cualquier cubo n -dimensional tal que $\mathcal{R} \subset \mathcal{Q}$ y $F : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ es definida de manera que ella es igual a f sobre \mathcal{R} y es igual a 0 en el resto, entonces $\int_{\mathcal{R}} f(x)dx = \int_{\mathcal{Q}} F(x)dx$.*

TAREA 6.2. *Considere $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Sea $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Verificar directamente de nuestra definición que f es integrable y que además debemos tener $\int_{\mathcal{R}} f(x, y)d(x, y) = 0$.

TAREA 6.3. *Considere $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Sea $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Verificar directamente de nuestra definición que f no es integrable.

OBSERVACIÓN 6.6 (Notación). *Cuando estamos mirando el caso $n = 2$, es de costumbre colocar dA en vez de colocar $d(x_1x_2)$ como una manera de indicar el elemento de área. En forma similar, para $n = 3$ uno usa la notación dV para denotar $d(x_1, x_2, x_3)$ que corresponde al elemento de volumen.*

6.2. Propiedades Lineales de Integrales

Sean $f, g : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones sobre una región acotada $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$, como las consideradas anteriormente, entonces tenemos las siguientes propiedades:

- (1) Si existe la integral

$$\int_{\mathcal{R}} f(x)dx,$$

entonces para cada $c \in \mathbb{R}$ existe la integral de la función $cf(x)$ sobre \mathcal{R} y se tiene la igualdad

$$\int_{\mathcal{R}} cf(x)dx = c \int_{\mathcal{R}} f(x)dx;$$

- (2) Si existen las integrales

$$\int_{\mathcal{R}} f(x)dx, \quad \int_{\mathcal{R}} g(x)dx,$$

entonces la función suma $(f + g)$ es integrable sobre la región \mathcal{R} y se tiene la igualdad

$$\int_{\mathcal{R}} (f + g)(x)dx = \int_{\mathcal{R}} f(x)dx + \int_{\mathcal{R}} g(x)dx;$$

- (3) Si existen las integrales

$$\int_{\mathcal{R}} f(x)dx, \quad \int_{\mathcal{R}} g(x)dx,$$

y si tenemos que para todo $x \in \mathcal{R}$ vale que $f(x) \leq g(x)$, entonces

$$\int_{\mathcal{R}} f(x)dx \leq \int_{\mathcal{R}} g(x)dx;$$

- (4) Supongamos que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, donde las regiones \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 no se sobreponen (es decir, sólo pueden tener comunes en sus bordes) y son del tipo que hemos considerado. Si existen dos de las siguientes integrales

$$\int_{\mathcal{R}} f(x)dx, \quad \int_{\mathcal{R}_1} f(x)dx, \quad \int_{\mathcal{R}_2} f(x)dx,$$

entonces existe la tercera y se tiene la igualdad

$$\int_{\mathcal{R}} f(x)dx = \int_{\mathcal{R}_1} f(x)dx + \int_{\mathcal{R}_2} f(x)dx$$

Una manera de verificar las propiedades anteriores, uno puede considerar las aproximaciones hechas por cubos anteriormente y verificar que estas propiedades se reflejan en esas sumas finitas. Luego, debemos recordar las propiedades que tienen los límites y usarlas en la definición de la integral.

6.3. Cálculo de Integrales Múltiples por Integrales Iteradas

En esta sección veremos que en muchos casos el cálculo de integrales múltiples puede ser hecha usando el cálculo de integrales en una variable como se aprendió en Matemática II.

En el caso que tenemos un cubo

$$\mathcal{Q} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

y tenemos una función continua $f : \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, entonces vale la igualdad

$$\int_{\mathcal{Q}} f(x) dx = \int_{a_n}^{b_n} \left[\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left[\cdots \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right] \cdots \right] dx_{n-1} \right] dx_n,$$

es decir, podemos calcular la integral múltiple por *integración reiterada* en cada variable. Esta igualdad es conocida como el *teorema de Fubini*.

OBSERVACIÓN 6.7. *Es importante hacer notar que si f ya no es continua, pero siendo acotada, entonces el recíproco no es siempre válido, es decir, se puede tener la existencia de las integrales reiteradas pero su valor depender del orden en el cual se calculan estas, en particular, no existir la integral múltiple. Un ejemplo con esta situación puede verse en el siguiente ejemplo (ver notas del curso Análisis II).*

EJEMPLO 6.1. *Consideremos el cubo bi-dimensional $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1]$. Es posible encontrar un subconjunto numerable $A \subset \mathcal{R}$ con las siguiente propiedades:*

- (i) *para cualquier $p \in \mathcal{R}$ y cualquier número positivo $r > 0$ vale que el disco abierto centrado en p y radio r contiene infinitos puntos de A ;*
- (ii) *toda línea horizontal contiene a lo más un número finito de puntos de A ;*
- (iii) *toda línea vertical contiene a lo más un número finito de puntos de A .*

Para ver lo anterior, intente el subconjunto de \mathcal{R} formado por puntos de la forma $(a/b, c/b) \in \mathbb{Q}^2$, donde a y b (respectivamente, c y b) no tienen factores en común. Ahora defina la función $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin A; \\ 1, & (x, y) \in A. \end{cases}$$

Ahora, como cada línea horizontal tiene a lo más un número finito de puntos de A , tenemos que la restricción de f a tal línea es acotada y continua con la posible excepción de un número finito de puntos. En particular, la integral de f restringida a tal línea existe y debe ser 0. En forma similar, existe la integral de f restringida a cada línea vertical y también es 0. Como las funciones constantes son también integrables, tenemos que las integrales iteradas existen y ambas dan 0. Pero la función f no es integrable en \mathcal{R} .

OBSERVACIÓN 6.8. *Existe otra noción de integral que generaliza nuestra integral de Riemann. Tal es la integral de Lebesgue. La función del ejemplo anterior resulta ser Lebesgue integrable, con integral igual a cero. Recomendamos a los interesados el curso de Análisis II.*

EJEMPLO 6.2. Si tenemos

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 3\}$$

y tenemos la función $f(x, y, z) = x + y + z$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} (x + y + z) d(x, y, z) &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[\int_{-1}^3 (x + y + z) dz \right] dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 [(3x + 3y + 9/2) - (-x - y + 1/2)] dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 (4x + 4y + 4) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 (4x + 6) dx \\ &= 8 \end{aligned}$$

Ahora veamos un ejemplo donde utilizar el teorema de Fubini.

EJEMPLO 6.3. Consideremos el cubo 2-dimensional

$$\mathcal{R} = [1, 2] \times [-1, 3] \subset \mathbb{R}^2$$

y la función continua $f(x, y) = 2xy$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} 2xy d(x, y) &= \int_1^2 \left[\int_{-1}^3 2xy dy \right] dx \\ &= \int_1^2 (9x - x) dx \\ &= 12 \end{aligned}$$

De hecho, para regiones más complicadas que un cubo también podemos calcular integrales múltiples por medio de integrales reiteradas. Por ejemplo, para el caso $n = 2$ tenemos el siguiente:

TEOREMA 6.5. Sean $\alpha, \beta : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $\alpha(x) \leq \beta(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Sea la región

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}.$$

Si existe la integral de f sobre \mathcal{R} , entonces vale la igualdad

$$\int_{\mathcal{R}} f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

EJEMPLO 6.4. Sea $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $f(x, y) = x + y$. Entonces podemos considerar $[a, b] = [-1, 1]$, $\alpha(x) = -\sqrt{1-x^2}$ y $\beta(x) = +\sqrt{1-x^2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} f(x, y) d(x, y) &= \int_{-1}^{+1} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} (x + y) dy \right] dx \\ &= \int_{-1}^{+1} \left[(xy + y^2/2) \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} \right] dx \\ &= \int_{-1}^{+1} 2x\sqrt{1-x^2} dx \\ &= \frac{-4}{3} \end{aligned}$$

Aprovechemos lo anterior para calcular el área del disco unitario.

EJEMPLO 6.5. Sea $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $f(x, y) = 1$. Entonces podemos considerar $[a, b] = [-1, 1]$, $\alpha(x) = -\sqrt{1-x^2}$ y $\beta(x) = +\sqrt{1-x^2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Vol}_2(\mathcal{R}) &= \int_{\mathcal{R}} f(x, y) d(x, y) \\ &= \int_{-1}^{+1} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy \right] dx \\ &= \int_{-1}^{+1} 2\sqrt{1-x^2} dx \\ &= \pi \end{aligned}$$

Ejercicio. Calcule el área de un disco de radio $r > 0$.

6.4. Sistemas de Coordenadas

Hay veces que el cálculo de integrales múltiples por medio de integrales reiteradas no es muy simple usando las coordenadas rectangulares. Pero si usamos otros tipos de coordenadas, entonces estos cálculos se simplifican. En esta sección discutiremos algunos tipos particulares de sistemas de coordenadas y de como estas simplifican en ciertos casos el cálculo de integrales múltiples.

Si consideremos una función inyectiva $H : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde Ω es un dominio, entonces diremos que H define un *sistema de coordenadas en $H(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$* . Cada punto $x \in H(\Omega)$ tiene sus coordenadas rectangulares x_1, \dots, x_n , que son dadas por $x_k = \langle x, e_k \rangle$, $k = 1, \dots, n$. Ahora, como la función H es inyectiva, existe un único punto $v \in \Omega$ tal que $H(v) = x$. Entonces las coordenadas rectangulares de v son las coordenadas de x definidas por H .

6.4.1. Coordenadas Polares o Esféricas. Tomemos

$$\Omega = (0, \infty) \times \underbrace{(0, \pi) \times \cdots \times (0, \pi)}_{(n-2)\text{-veces}} \times [0, 2\pi)$$

La función $H(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = x = (x_1, \dots, x_n)$, es definida por

$$\begin{cases} x_1 &= r \cos(\theta_1) \\ x_2 &= r \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{n-2}) \cos(\theta_{n-1}) \\ x_n &= r \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{n-2}) \sin(\theta_{n-1}) \end{cases}$$

donde

- (1) $r = \|x\|$;
- (2) Para $k = 1, \dots, n-3$, tenemos que θ_k es ángulo entre e_k y $x_k e_k + x_{k+1} e_{k+1} + \cdots + x_n e_n$;
- (3) θ_{n-1} es el ángulo polar desde e_{n-1} hacia $x_n e_n + x_{n+1} e_{n+1}$.

En este caso, el determinante del Jacobiano de H es

$$r^{n-1} \sin^{n-2}(\theta_1) \sin^{n-3}(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{n-2})$$

y obtenemos que

$$\int_{\mathcal{R}} f(x) dx_1 \cdots dx_n =$$

$$\int_{H^{-1}(\mathcal{R})} \widehat{f}(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) r^{n-1} \sin^{n-2}(\theta_1) \sin^{n-3}(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{n-2}) dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}$$

donde

$$\widehat{f} = f \circ H$$

EJEMPLO 6.6. Si $W \subset S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, donde

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

y consideremos la región

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1, x/\|x\| \in W\}$$

es tal que existe $\text{Vol}_n(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} dx_1 \cdots dx_n$, entonces usando las coordenadas esféricas obtenemos que

$$\text{Vol}_n(\mathcal{R}) = \frac{1}{n-1} \left[\int_{H^{-1}(W)} \sin^{n-2}(\theta_1) \sin^{n-3}(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{n-2}) d\theta_1 \cdots d\theta_{n-2} \right]$$

Ejercicio. Utilice el ejemplo anterior para calcular el volumen n -dimensional de la bola unitaria

$$B_1(0) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

Caso n=2: En el caso particular $n = 2$ tenemos

$$\begin{cases} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \end{cases}$$

donde $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Luego si tenemos

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : \alpha \leq \theta \leq \beta, r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)\}$$

donde $\alpha < \beta$ y r_1 y r_2 son funciones continuas en la variable θ . Entonces vale la igualdad

$$\int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \widehat{f}(r, \theta) r dr \right] d\theta$$

donde $\widehat{f}(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

EJEMPLO 6.7. Consideremos la región \mathcal{R} del plano \mathbb{R}^2 acotada por los rayos

$$L_1 = \{\theta = \frac{\pi}{6}\}$$

$$L_2 = \{\theta = \frac{\pi}{3}\}$$

y los círculos

$$C_1 = \{r = 1\}$$

$$C_2 = \{r = 2\}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{R}} x\sqrt{x^2+y^2}dxdy &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\int_{r=1}^{r=2} r^2 \cos(\theta)rdr \right] d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\int_{r=1}^{r=2} r^3 \cos(\theta)dr \right] d\theta \\
 &= \frac{15}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(\theta)d\theta \\
 &= \frac{15(\sqrt{3}-1)}{8}
 \end{aligned}$$

6.4.2. Coordenadas Cilíndricas. En este caso

$$\Omega = (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}^{n-2}$$

$$H(r, \theta, z_3, \dots, z_n) = (x_1, \dots, x_n)$$

donde

- (1) $x_1 = r \cos(\theta)$;
- (2) $x_2 = r \sin(\theta)$;
- (3) $x_k = z_k$, para $k = 3, 4, \dots, n$.

En este caso, el determinante del Jacobiano de H es r y obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{R}} f(x)dx_1 \cdots dx_n &= \\
 \int_{H^{-1}(\mathcal{R})} \widehat{f}(r, \theta, z_3, \dots, z_n)rdrd\theta dz_3 \cdots dz_n
 \end{aligned}$$

donde

$$\widehat{f} = f \circ H$$

Caso $n = 2$: En el caso $n = 2$ coordenadas cilíndricas y esféricas (polares) coinciden.

Caso $n = 3$: En el caso $n = 3$ tenemos

$$\int_{\mathcal{R}} f(x, y, z)dxdydz = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \left[\int_{z_1(\theta)}^{z_2(\theta)} \widehat{f}(r, \theta, z)rdz \right] dr \right] d\theta$$

donde

$$\widehat{f}(r, \theta, z) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

EJEMPLO 6.8. Veamos un ejemplo en $n = 3$ donde nos conviene usar coordenadas cilíndricas para obtener la integral de manera más simple que usando coordenadas rectangulares. Calculemos el volumen del cilindro C de base el disco cerrado de radio s y altura $h > 0$. Entonces,

$$\text{Vol}(C) = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^s \left[\int_0^h rdz \right] dr \right] d\theta = \pi h s^2$$

OBSERVACIÓN 6.9. *Observemos que en el caso de coordenadas esféricas y/o cilíndricas hemos puesto $r > 0$. Pero esto no presenta problemas ya que al eliminar un conjunto muy pequeño la integral no se ve afectada. Por ejemplo, si consideramos una bola de radio R , entonces podemos eliminar el centro de esta para calcular la integral (en caso de existir) por medio de coordenadas esféricas. La misma observación ocurre, en coordenadas esféricas, para los ángulos $\theta_j \in (0, \pi)$, para $j = 1, \dots, n - 2$.*

6.5. Algunas Aplicaciones

6.5.1. Promedio de Funciones Sobre Regiones. Consideremos una región $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ y una función $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existen las integrales

$$\text{Masa de } \mathcal{R} \text{ con densidad } f = \int_{\mathcal{R}} f(x) dx$$

$$\text{Volumen de } \mathcal{R} = \int_{\mathcal{R}} dx$$

Se define el *promedio de f sobre \mathcal{R}* como el valor

$$\text{Promedio de } f \text{ sobre } \mathcal{R} = \frac{\int_{\mathcal{R}} f(x) dx}{\int_{\mathcal{R}} dx} = \frac{\text{Masa de } \mathcal{R} \text{ con densidad } f}{\text{Volumen de } \mathcal{R}}$$

6.5.2. Momentos y Centros de Masa. Consideremos una región $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$, la cual podemos suponer que es acotada y se pueda escribir como unión finita o infinita numerable de cubos n -dimensionales, y consideremos una función densidad $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la cual es integrable sobre tal región.

Dado un hiperplano $P \subset \mathbb{R}^n$, tenemos que $\mathbb{R}^n - P$ consiste de dos semiespacios; escojamos uno de ellos el cual denotamos por P_+ . Sea L_P cualquier línea en \mathbb{R}^n ortogonal a P . Se define su *primer momento* respecto al hiperplano $P \subset \mathbb{R}^n$ y al subespacio P_+ como la integral

$$\int_{\mathcal{R}} d(x) f(x) dx$$

donde $d(x)$ denota la función distancia de x hasta el hiperplano P multiplicada por un signo $+$ si la proyección de x sobre la línea L pertenece a P_+ y por $-$ en caso contrario. El *centro de masa respecto L y P_+* de \mathcal{R} es dado por el punto $\tilde{x} = (r_1, \dots, r_n)$ donde

$$r_j = \frac{\int_{\mathcal{R}} d(x) f(x) dx}{\int_{\mathcal{R}} f(x) dx}$$

OBSERVACIÓN 6.10. *Observemos que la definición anterior no depende de la línea L escogida, pero si en la elección de P_+ , la cual tiene dos posibilidades. El cambiar la elección de P_+ sólo cambia el signo del momentum y centro de masa.*

6.5.3. Caso Particular. Por ejemplo, si P es el hiperplano ortogonal al eje x_j , es decir, $P = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = 0\}$ y escogemos $P_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j > 0\}$, entonces $d(x) = x_j$ y en tal caso el primer momento respecto a este hiperplano queda dado por

$$\int_{\mathcal{R}} x_j f(x) dx,$$

y el *centro de masa* de \mathcal{R} respecto a la densidad $f(x)$ es dado por el punto $\tilde{x} = (r_1, \dots, r_n)$ donde

$$r_j = \frac{\int_{\mathcal{R}} x_j f(x) dx}{\int_{\mathcal{R}} f(x) dx}$$

OBSERVACIÓN 6.11. *En caso que tomemos la densidad una función constante (diferente de cero), decimos que el centro de masa es el centroide de la región. Este punto no depende de la constante escogida.*

Tarea. Calcular los primeros momentos y centros de masa para los ejemplos encontrados anteriormente en este capítulo.

6.5.4. Momentos de Inercia. Consideremos una región $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$, la cual podemos suponer que es acotada y se pueda escribir como unión finita o infinita numerable de cubos n -dimensionales, y consideremos una función densidad $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la cual es integrable sobre tal región.

Se define su *momento de inercia* respecto a la línea $L \subset \mathbb{R}^n$ como la integral

$$\int_{\mathcal{R}} d^2(x) f(x) dx$$

donde $d(x)$ denota la función distancia de x hasta la línea L .

Por ejemplo, si L es el eje x_j , es decir, $L = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k = 0, k \neq j\}$, entonces $d(x) = \sum_{k \neq j} x_k^2$ y en tal caso el momento de inercia respecto a esta línea queda dado por

$$\int_{\mathcal{R}} \left(\sum_{k \neq j} x_k^2 \right) f(x) dx$$

Tarea. Calcular el momento de inercia respecto a un eje coordenado para los ejemplos encontrados anteriormente en este capítulo.

INTEGRACION DE LINEA

Consideremos los siguientes problemas.

¿Cómo calcular la masa de un cable?

¿Cómo calcular el trabajo realizado por un campo de fuerzas a lo largo de una trayectoria?

En este capítulo responderemos a estas preguntas.

7.1. Calculando la masa de un cable

Para modelar este problema, consideramos una parametrización de curva

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

y una densidad

$$\delta : \alpha([a, b]) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Para efectos prácticos, la función densidad puede ser asumida ser una función continua a trazos en la curva $\alpha([a, b])$ y acotada. Recuerde las condiciones impuestas a las funciones reales de una variable para calcular integrales.

Intentaremos responder a la pregunta por métodos de aproximación. La idea será reemplazar nuestra curva original por curvas poligonales con densidad constante por trazos. El cálculo de la masa en este caso particular es simple.

Consideremos una partición

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b\}$$

y una colección S_P de puntos

$$s_j \in [t_{j-1}, t_j].$$

Usando la partición P y la colección S_P podemos considerar la curva poligonal que se obtiene al conectar los puntos $\alpha(t_{j-1})$ con $\alpha(t_j)$ con un trazo recto, para cada $j = 1, \dots, k - 1$. A cada uno de esos trazos rectos damos la densidad constante $\delta(s_j)$. Es claro que la masa del cable así modelado es dada por

$$M(\alpha, P, S_P) = \sum_{j=1}^k \delta(s_j) \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\|.$$

La idea ahora es agregar mas puntos a la partición P y puntos correspondientes a S_P . Lo que vemos es que las curvas poligonales que vamos construyendo parecen ser buenas aproximaciones de la curva original α y que los valores $M(\alpha, P, S_P)$ parecen ser buenas aproximaciones de la masa de nuestro cable original.

Ahora, observemos que como hemos impuesto la condición que la densidad δ se acotada, es decir, existen m, M tales que

$$m \leq \delta(\alpha(t)) \leq M.$$

Luego,

$$ml(\alpha) \leq M(\alpha, P, S_P) \leq Ml(\alpha).$$

Diremos que la masa de nuestro cable original existe si existe un valor D tal que los valores $M(\alpha, P, S_P)$ tienden a ser D , en cuyo caso el valor D es la masa buscada. En tal caso esto lo denotaremos por el símbolo

$$\oint_{\alpha} \delta ds.$$

Se tiene que el anterior existe bajo la condición extra que α es continuamente derivable a trazos y vale la igualdad:

$$\oint_{\alpha} \delta ds = \int_a^b \delta(t) \|\alpha'(t)\| dt \quad (*)$$

La anterior es llamada la *integral de línea de δ sobre α* .

TAREA 7.1. Verificar que bajo una reparametrización de la curva α la integral $(*)$ no cambia. Esto corresponde a hacer un cambio de variable en el lado izquierdo de $(*)$.

7.2. Calculando el trabajo realizado por una fuerza sobre una trayectoria

Consideremos una trayectoria C y un campo de fuerzas actuando sobre esta. Ahora veremos como podemos calcular el trabajo realizado.

Consideremos una parametrización continuamente derivable a trozos que modela la trayectoria, digamos

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

y consideremos un campo de fuerzas

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

de manera que

$$\alpha([a, b]) \subset \Omega.$$

Recordemos que para calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas F sobre esta trayectoria α , lo que debemos considerar (de manera infinitesimal) es la fuerza realizada en dirección del movimiento (es decir, en la dirección del tangente) veces la distancia recorrida. Esto nos dice que debemos calcular la componente de la fuerza F en el punto $\alpha(t)$ en la dirección del tangente $T_{\alpha}(t)$. Recordemos que ésta es dada por

$$(F(\alpha(t)) \cdot T_{\alpha}(t))T_{\alpha}(t).$$

De esta manera el trabajo realizado por el campo de fuerzas F sobre el trayecto α es dada por

$$\begin{aligned} W(\alpha, F) &= \oint_{\alpha} F \cdot T_{\alpha} ds = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \|\alpha'(t)\| dt = \\ &= \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot d\alpha(t) = \\ &= \oint_{\alpha} F \cdot d\alpha = \end{aligned}$$

7.2. CALCULANDO EL TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA SOBRE UNA TRAYECTORIA

$$= \oint_{\alpha} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \cdots + F_n dx_n,$$

donde

$$F = (F_1, \dots, F_n)$$

$$\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

OBSERVACIÓN 7.1. Cuando tenemos un campo de fuerzas $F = (F_1, \dots, F_n)$, actuando sobre una curva α , de manera que alguna componente $F_j = 0$, entonces en la integral arriba no aparece tal factor. Por ejemplo, para $n = 3$, podemos tener algo como

$$\oint_{\alpha} F_1 dx_1$$

lo cual quiere decir nada más que ella es

$$\oint_{\alpha} F_1 dx_1 + 0 dx_2 + 0 dx_3.$$

TAREA 7.2.

1.- Calcular $\int_{\alpha} xyz dz$, para

$$\alpha : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (\sin(t), \cos(t), t)$$

2.- Calcular el trabajo realizado por la fuerza

$$F(x, y, z) = \left(\frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right),$$

sobre la curva

$$\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (\sin(t), \cos(t), 0)$$

3.- Si $F = \nabla f$, para alguna función potencial $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con primeras derivadas parciales continuas, y $\alpha : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ es una parametrización de curva que es continuamente derivable a trozos. Calcular el valor de la integral de línea

$$\oint_{\alpha} F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n = \oint_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

[Ind: Recuerde el teorema de la regla de la cadena para calcular la derivada respecto a t de la composición $f \circ \alpha(t)$].

Deducir que campos gradientes continuos son conservativos.

4.- Sea $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo conservativo continuo. Supongamos que el abierto Ω tiene la propiedad que todo par de puntos de él pueden ser conectados por un camino continuo. Fije un punto $p_0 \in \Omega$. Por cada punto $q \in \Omega$ escoja un camino continuo $\alpha_q : [0, b_q] \rightarrow \Omega$ tal que $\alpha_q(0) = p_0$ y $\alpha_q(b_q) = q$. Defina la función

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : q \mapsto f(q) = \oint_{\alpha_q} F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n,$$

donde $F = (F_1, \dots, F_n)$. Verifique que $\nabla f = F$. [Ind: use el hecho que la integral anterior no depende de la elección de α_q y considere α_q como trazos rectos paralelos a los ejes coordenados.]

Concluir que campos conservativos continuos son campos gradientes.

5.- Concluir de los problemas 3.- y 4.- que los campos gradientes continuos son los mismo que campos conservativos continuos.

7.3. Centros de masas y momentos de inercia

Consideremos una parametrización de curva que sea continuamente derivable a trazos

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

y una función densidad

$$\delta : \alpha([a, b]) \rightarrow \mathbb{R},$$

la cual asumiremos que es acotada y continua a trazos.

7.3.0.1. *Centro de masa.* Siguiendo la misma idea como fue en el caso de regiones, podemos calcular el centro de masa del cable modelado por α y densidad δ como el punto

$$\widehat{r} = (r_1, \dots, r_n),$$

definido por

$$r_j = \frac{\oint_{\alpha} x_j \delta ds}{\oint_{\alpha} \delta ds}$$

7.3.0.2. *Momento de inercia.* De la misma manera, si tenemos una recta $L \subset \mathbb{R}^n$, podemos calcular el momento de inercia obtenido al girar nuestro cable alrededor de ella. Este momento de inercia es dado por

$$I(\alpha, \delta, L) = \oint_{\alpha} d^2 \delta ds,$$

donde d denota la distancia desde cada punto $\alpha(t)$ a la recta L .

7.4. Fluidos planares

Supongamos que tenemos un fluido que circula sobre una región del plano, digamos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, con densidad dada por

$$\delta : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

y velocidad dada por

$$V : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

En cada punto $x \in \Omega$ este fluido produce una fuerza dada por

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto F(x) = \delta(x)V(x).$$

Si consideramos una trayectoria cerrada en Ω , digamos parametrizada por

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \alpha(a) = \alpha(b),$$

la cual podemos asumir que es derivable por trozos.

7.4.0.3. *Circulación de un fluido.* Nuestro fluido puede tender a atravesar esta porción encerrada por α pero también este puede tender a moverse en dirección tangencial (es decir, a mantenerse en la porción encerrada). En este último caso decimos que tenemos un movimiento circular del fluido respecto a la curva α .

Como $F \cdot T_{\alpha}$ es la componente de la fuerza realizada por este fluido en dirección tangencial a la curva, tenemos que la integral

$$\oint_{\alpha} F \cdot d\alpha = \oint_{\alpha} F_1 dx_1 + F_2 dx_2.$$

representa la tendencia del fluido a circular a lo largo de α y el valor de esta integral es llamada la *circulación del fluido a lo largo del contorno α* .

7.4.0.4. *Perdida de fluido.* También podemos estar interesados en la parte del fluido que tiende a irse de la región encerrada por el contorno hecho por la curva α . Para medir esta cantidad, necesitamos considerar la componente de la fuerza del fluido F que va en la dirección del vector normal de α apuntando hacia el exterior de la región encerrada. Denotemos este *vector unitario normal exterior a α* como

$$n_\alpha = \pm N_\alpha,$$

donde N_α era el normal unitario de α . Como la componente de la fuerza F en dirección de n_α es dada por

$$(F \cdot n_\alpha)n_\alpha,$$

tenemos que la cantidad que tiende a salir de nuestra región encerrada por α es dada por

$$\oint_\alpha F \cdot n_\alpha ds,$$

y es llamada la *perdida neta* del fluido respecto al contorno dado por la curva α .

TAREA 7.3. *Considere en el caso anterior que $F(x, y) = (2 + x, 0)$ y que $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$, para $t \in [0, 2\pi]$. Calcule la circulación y la pérdida neta del fluido asociado.*

7.5. Teorema de Green

7.5.1. **Fórmula de Green para rectángulos.** Comencemos con un rectángulo $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ cuyos vértices son dados por

$$(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_2), \text{ donde } a_1 < a_2, b_1 < b_2.$$

Orientemos la curva borde Γ de \mathcal{R} de manera que la región interior de \mathcal{R} este a la izquierda. Supongamos que tenemos dado un campo de vectores $F = (P, Q)$ continuo y definido sobre todo el rectángulo \mathcal{R} (incluyendo su borde Γ). Entonces podemos calcular la integral de línea

$$\oint_\Gamma P dx + Q dy.$$

Sea Γ_1 el arco recto que conecta el vértice (a_1, b_1) con (a_2, b_1) orientado de manera que (a_1, b_1) es el punto inicial. Sea Γ_2 el arco recto que conecta el vértice (a_2, b_1) con (a_2, b_2) orientado de manera que (a_2, b_1) es el punto inicial. Sea Γ_3 el arco recto que conecta el vértice (a_2, b_2) con (a_1, b_2) orientado de manera que (a_2, b_2) es el punto inicial. Sea Γ_4 el arco recto que conecta el vértice (a_1, b_2) con (a_1, b_1) orientado de manera que (a_1, b_2) es el punto inicial. De esta manera

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4.$$

Por la propiedad aditiva de las integrales tenemos la igualdad

$$(*) \quad \oint_\Gamma P dx + Q dy =$$

$$\oint_{\Gamma_1} P dx + Q dy + \oint_{\Gamma_2} P dx + Q dy + \oint_{\Gamma_3} P dx + Q dy + \oint_{\Gamma_4} P dx + Q dy.$$

Una parametrización de Γ_1 es dada por

$$\gamma_1 : [a_1, a_2] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, b_1).$$

Una parametrización de Γ_2 es dada por

$$\gamma_2 : [b_1, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (a_2, t).$$

Una parametrización de Γ_3 es dada por

$$\gamma_2 : [a_1, a_2] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (a_2 + a_1 - t, b_2).$$

Una parametrización de Γ_4 es dada por

$$\gamma_2 : [b_1, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (a_1, b_1 + b_2 - t).$$

Con estas parametrizaciones tenemos de la igualdad (*) que

$$(**) \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int_{a_1}^{a_2} P(x, b_1)dx + \int_{b_1}^{b_2} Q(a_2, y)dx + \\ - \int_{a_1}^{a_2} P(x, b_2)dx - \int_{b_1}^{b_2} Q(a_1, y)dx.$$

Si además suponemos que las derivadas parciales

$$\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$$

existen y son acotadas y continuas excepto en un conjunto muy pequeño (por ejemplo si ellas son continuas), entonces la parte derecha de la igualdad (**) es lo que se obtiene al usar integración iterada para calcular la integral doble siguiente:

$$\int \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \int \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx.$$

En particular hemos obtenido la igualdad

$$\int \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy,$$

conocida como la **fórmula de Green para rectángulos**.

7.5.2. Fórmula de Green para unión finita de rectángulos. Consideremos una colección finita de rectángulos en el plano, digamos

$$\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_N,$$

de manera que cualquiera dos de ellos son disjuntos ó a lo más tienen parte del bode en común (decimos que es una *unión esencialmente disjunta de rectángulos*). Sea

$$\mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^N \mathcal{R}_j \subset \mathbb{R}^2,$$

y orientemos las curvas bordes de \mathcal{R}_j de manera que el rectángulo encerrado este a la izquierda. Observemos que el borde Γ de la región \mathcal{R} es la unión de las partes de las curvas bordes que no forman parte común de dos rectángulos diferentes. Luego tenemos

$$\int \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{j=1}^N \int \int_{\mathcal{R}_j} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy =$$

$$= \sum_{j=1}^N \oint_{\Gamma_j} Pdx + Qdy.$$

Por lo observado sobre el borde Γ de la región \mathcal{R} y el hecho que

$$\oint_{\alpha} Pdx + Qdy = - \oint_{-\alpha} Pdx + Qdy,$$

obtenemos que

$$\int \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy,$$

llamada la **fórmula de Green para unión de rectángulos esencialmente disjuntos**.

7.5.3. Fórmula de Green para regiones admisibles. Una *región admisible* será para nosotros una región $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ acotada por un número finito de curvas cerradas que son continuas y continuamente diferenciables a trozos. Dada una región admisible \mathcal{R} , tenemos una orientación natural en las curvas del borde obligando a que la región encerrada siempre esté a la izquierda.

Una región admisible \mathcal{R} se puede escribir como una unión finita o infinita numerable de rectángulos esencialmente disjuntos. Denotemos el borde de \mathcal{R} por Γ (que es una unión de curvas cerradas orientadas de manera que \mathcal{R} está siempre a la izquierda). Los resultados anteriores permiten establecer la siguiente igualdad:

TEOREMA 7.1 (Fórmula de Green). *Sea $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ una región admisible con borde Γ (que es una unión de curvas cerradas orientadas de manera que \mathcal{R} está siempre a la izquierda). Si tenemos un campo de vectores $F = (P, Q)$ definido sobre todo \mathcal{R} (incluyendo el borde), el cual es continuo y tiene las primeras derivadas parciales continuas*

$$\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y},$$

entonces:

$$\int \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy.$$

OBSERVACIÓN 7.2 (Forma divergente de la fórmula de Green). *Si consideramos el campo de vectores $G = (-Q, P)$, entonces la fórmula de Green queda dada como*

$$\int \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} -Qdx + Pdy,$$

es decir

$$\int \int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot F dx dy = \oint_{\Gamma} F \cdot n_{\Gamma} ds,$$

donde n_{Γ} denota como antes el normal unitario exterior.

Esta forma permite dar una explicación física de la divergencia del campo. La parte izquierda tenemos la integral de la divergencia y a la derecha tenemos la integral de línea que nos calcula como el campo de fuerzas tiende a escaparse de la región encerrada por la curva Γ . Si miramos esto de manera infinitesimal, veremos

que la integral de la izquierda nos mide la manera como el campo de fuerzas tiende a escapar (diverger) de regiones encerradas.

OBSERVACIÓN 7.3 (Forma rotacional de la fórmula de Green). *Si consideramos el campo de vectores $G(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$, entonces la fórmula de Green queda dada como*

$$\int \int_{\mathcal{R}} (\nabla \times G) \cdot \hat{k} \, dxdy = \oint_{\Gamma} G \cdot T_{\Gamma} ds,$$

donde T_{Γ} es el vector unitario de la curva Γ y $\hat{k} = (0, 0, 1)$.

Esta forma permite dar una explicación física de rotacional del campo. La parte izquierda tenemos la integral del rotacional y a la derecha tenemos la integral de línea que nos calcula como el campo de fuerzas tiende a moverse de manera tangencial a la curva Γ . Si miramos esto de manera infinitesimal, veremos que la integral de la izquierda nos mide la manera como el campo de fuerzas tiende a rotar entorno al punto.

EJEMPLO 7.1 (Cálculo de Areas). *Consideremos una región admisible \mathcal{R} con border Γ orientado de manera que la región acotada esta a la izquierda. Si escogemos un campo continuo de vectores $F = (P, Q)$ de manera que*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1,$$

entonces la fórmula de Green nos dice:

$$\text{Area}(\mathcal{R}) = \int \int_{\mathcal{R}} 1 \, dxdy = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy.$$

Por ejemplo, si usamos $P = 0$, $Q = x$, entonces lo anterior nos da

$$\text{Area}(\mathcal{R}) = \oint_{\Gamma} xdy.$$

Si usamos $P = -y$, $Q = 0$, entonces lo anterior nos da

$$\text{Area}(\mathcal{R}) = - \oint_{\Gamma} ydx.$$

Si usamos $P = -y/2$, $Q = x/2$, entonces lo anterior nos da

$$\text{Area}(\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} xdy - ydx.$$

EJEMPLO 7.2 (Campos localmente conservativos). *Habiamos visto anteriormente que si $F = \nabla f$ para cierto potencial f , entonces*

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = f(p) - f(q),$$

donde p es el punto final de la curva Γ y q es su punto inicial, es decir, todo campo gradiente es conservativo. También tenemos que si F es un campo conservativo,

entonces podemos usar integración para obtener un potencial y ver que F debe ser campo gradiente.

Ahora, para un campo gradiente $F = (P, Q) = \nabla f$ tenemos la igualdad

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Recíprocamente, si tenemos un campo de vectores $F = (P, Q)$ de manera que existen la primeras derivadas parciales y valga la igualdad

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

entonces la forma rotacional de la fórmula de Green nos asegura que para toda curva cerrada Γ que encierra una región completamente contenida en el dominio de definición de F vale la igualdad

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = 0.$$

Esto nos asegura que si tenemos dos curvas Γ_1 y Γ_2 , que parten desde el mismo punto inicial y llegan al mismo punto final y además la región encerrada por ellas está completamente contenida en el dominio de definición de F , entonces

$$\oint_{\Gamma_1} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma_2} P dx + Q dy.$$

Esta igualdad nos asegura que F es localmente conservativo, luego localmente gradiente. Hemos probado el siguiente resultado

TEOREMA 7.2. Sea $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo continuo con primeras derivadas parciales. Entonces F es localmente gradiente (es decir, posee localmente potenciales) sí y sólo si

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

TAREA 7.4. Considere el campo planar

$$F : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Verifique que se tienen que F es localmente conservativo. Calcule la integral de línea

$$\oint_{\Gamma} \frac{-y dx}{x^2 + y^2} + \frac{x dy}{x^2 + y^2},$$

donde Γ es el círculo de radio 1 y concluya que F no es conservativo.

EJEMPLO 7.3. Consideremos un campo de vectores $F = (P, Q)$ de manera que existen la primeras derivadas parciales y valga la igualdad (divergencia cero)

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

La forma divergente de la fórmula de Green nos asegura que para toda curva cerrada Γ que encierra una región completamente contenida en el dominio de definición de F vale la igualdad

$$\oint_{\Gamma} F \cdot n_{\Gamma} ds = 0.$$

Esto nos asegura que si tenemos dos curvas cerradas Γ_1 y Γ_2 tales que ambas encierran una región que está completamente contenida en el dominio de definición de F , entonces

$$\oint_{\Gamma_1} F \cdot n_{\Gamma} ds = \oint_{\Gamma_2} F \cdot n_{\Gamma} ds.$$

Observemos que sólo estamos pidiendo que la región anular encerrada por las curvas esté contenida en el dominio de definición de F .

TAREA 7.5. Considere el campo planar

$$F : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right).$$

Verifique que $\nabla \cdot F = 0$. De la tarea anterior calculó la integral de línea

$$\oint_{\Gamma} \frac{-ydx}{x^2+y^2} + \frac{xdy}{x^2+y^2},$$

donde Γ es el círculo de radio 1. ¿Qué concluye de su respuesta?

LEGOS Y SUPERFICIES

8.1. Piezas de lego

Sea $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ una región admisible. Diremos que una función

$$\phi : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

la cual es inyectiva, diferenciable y tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \neq (0, 0, 0), \quad \forall (u, v) \in \mathcal{R},$$

es una *parametrización de pieza de lego*. La imagen $\phi(\mathcal{R})$ será llamada una *pieza de lego*.

OBSERVACIÓN 8.1.

- (1) *En la definición de parametrización de pieza de lego tenemos "diferenciabilidad". Es claro lo que queremos decir cuando los puntos viven en el interior de la región admisible \mathcal{R} . ¿Qué quiere decir si el punto está en el borde? Para evitar problemas, supondremos siempre que nuestra función ϕ está definida en un abierto Ω del plano que contiene a \mathcal{R} y que ella es diferenciable allí. Pedimos que las derivadas parciales hasta segundo orden existan y sean continuas ya que esto lo necesitaremos más adelante.*
- (2) *El vector*

$$n_\phi(u, v) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \neq (0, 0, 0),$$

es ortogonal a la pieza de lego $\phi(\mathcal{R})$ en el punto $\phi(u, v)$. Las orientaciones naturales que tienen las curvas borde de la región admisible \mathcal{R} son enviadas a orientaciones en las curvas del borde de la pieza de lego $\phi(\mathcal{R})$ por medio de la parametrización ϕ . La pieza de lego $\phi(\mathcal{R})$ tiene dos caras en \mathbb{R}^3 . Cuando caminamos por cualquier curva del borde de la pieza de lego $\phi(\mathcal{R})$, siguiendo la orientación determinada como ya se dijo antes, una de esas caras queda a la izquierda; la cual llamaremos la cara correcta de la pieza de lego según la parametrización ϕ . La cara correcta queda también determinada por el vector normal n_ϕ ; es la cara que vemos desde arriba siguiendo el vector normal n_ϕ .

- (3) *Podemos pensar en piezas de legos como el equivalente a curvas suaves y parametrizaciones de piezas de legos como parametrizaciones regulares de curvas.*
- (4) *Al igual que las curvas, una misma pieza de lego puede tener muchas parametrizaciones diferentes.*

- (5) *En muchos textos de cálculo nuestras piezas de legos son también llamadas superficies paramétricas y nuestras parametrizaciones de piezas de lego son llamadas parametrizaciones de superficies paramétricas.*

EJEMPLO 8.1 (Gráficos). Sea $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ una región admisible y sea

$$f : \mathbb{R} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

una función diferenciable. Entonces

$$\phi : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$$

define una parametrización de pieza de lego. En este caso, tenemos que la pieza de lego $\phi(\mathcal{R})$ es la gráfica de f y

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) = \left(\frac{-\partial f}{\partial u}(u, v), \frac{-\partial f}{\partial v}(u, v), 1 \right).$$

TAREA 8.1.

- (1) Sean $0 < S < R$ y considere las regiones admisibles

$$\mathcal{R} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq R^2\},$$

$$\mathcal{R}_S = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq S^2\}.$$

- (i) Observe que

$$\phi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u, v, +\sqrt{R^2 - u^2 - v^2})$$

no es parametrización de pieza de lego.

- (ii) Vea que

$$\phi : \mathcal{R}_S \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u, v, +\sqrt{R^2 - u^2 - v^2})$$

es parametrización de pieza de lego.

- (iii) Verifique que $\phi(\mathcal{R})$ es pieza de lego (encuentre una parametrización de pieza de lego).

- (iv) Ver que $\phi(\mathcal{R})$ puede ser aproximada por las piezas de lego $\phi(\mathcal{R}_S)$ cuando S se aproxima a R por debajo.

- (2) Analizar de manera concreta los ejemplos

$$(1) f(u, v) = +\sqrt{1 - u^2 - v^2},$$

$$(2) f(u, v) = u^2 + v^2.$$

EJEMPLO 8.2 (Proyección Estereográfica). Sea $R > 0$ y consideremos la esfera de radio R menos el polo norte

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\} - \{(0, 0, R)\}.$$

Consideremos la función $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida de la siguiente manera: por cada punto $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ miramos la recta $L_{u,v} \subset \mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $(0, 0, R)$ y $(u, v, 0)$. Tal recta corta a la esfera de radio R y centro $(0, 0, 0)$ en dos puntos. Uno de esos puntos es $(0, 0, R)$ y el otro es $P(u, v)$.

Para calcular $P(u, v)$ debemos observar que todo punto de $L_{u,v}$ es de la forma

$$(1 - t)(0, 0, R) + t(u, v, 0) = (tu, tv, (1 - t)R),$$

para cierto calor real t . Si pedimos que tal punto pertenezca a S , entonces debemos tener

$$t^2u^2 + t^2v^2 + (1-t)^2R^2 = R^2,$$

de donde obtenemos una ecuación de grado 2 en t . Una de las soluciones es $t = 0$ y la otra es

$$t = \frac{2R}{u^2 + v^2 + R^2}.$$

De esta manera

$$P(u, v) = \left(\frac{2uR}{u^2 + v^2 + R^2}, \frac{2vR}{u^2 + v^2 + R^2}, R \frac{u^2 + v^2 - R^2}{u^2 + v^2 + R^2} \right)$$

Además, por la construcción, tenemos que $P(\mathbb{R}^2) = S$ y P es inyectiva. Se puede calcular que

$$\frac{\partial P}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial P}{\partial v}(u, v) \neq (0, 0, 0),$$

obteniendo que P es una parametrización de la pieza de lego S .

EJEMPLO 8.3 (Aplicación del teorema de la función implícita). Consideremos una función diferenciable

$$Q : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

un punto $a \in Q(U)$, de manera que para cada punto en $S = Q^{-1}(a)$ tenemos que la matriz Jacobiana

$$JacQ = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} \end{bmatrix}$$

siempre tiene rango 1. Entonces el teorema de la función implícita nos asegura que alrededor de cada punto en S podemos ver S como el gráfico de una función diferenciable. Se puede verificar de esto que S es una unión (probablemente infinita) de piezas de lego.

TAREA 8.2. Considere $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Detalle el ejemplo anterior para este caso con todos los posibles valores de $a \neq 0$.

8.2. Reparametrizaciones de Piezas de Lego

EJEMPLO 8.4 (Parametrizaciones conjugadas). Consideremos una parametrización de pieza de lego

$$\phi : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Sea $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (\hat{u}, \hat{v}) \mapsto (u, v) = (\hat{u}, -\hat{v})$ y sea $\mathcal{D} = h(\mathcal{R})$. Se tiene que \mathcal{D} es una región admisible y que

$$\psi = \phi \circ h : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

es de nuevo una parametrización de pieza de lego tal que $\phi(\mathcal{R}) = \psi(\mathcal{D})$. En este caso tenemos que ambas parametrizaciones dan la misma pieza de lego, pero ellas definen diferentes caras correctas. De hecho

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial \hat{u}}(\hat{u}, \hat{v}) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(\hat{u}, -\hat{v}) \\ \frac{\partial \psi}{\partial \hat{v}}(\hat{u}, \hat{v}) = -\frac{\partial \phi}{\partial v}(\hat{u}, -\hat{v}) \end{cases}$$

luego vemos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \hat{u}}(\hat{u}, \hat{v}) \times \frac{\partial \psi}{\partial \hat{v}}(\hat{u}, \hat{v}) = -\frac{\partial \phi}{\partial u}(\hat{u}, -\hat{v}) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(\hat{u}, -\hat{v}),$$

es decir, los vectores normales dados por ambas parametrizaciones de lego son opuestos en cada punto de la pieza de lego (común) parametrizada.

En el ejemplo anterior vemos que una misma pieza de lego puede ser parametrizada por parametrizaciones diferentes y más aún, con normales opuestos. Consideremos una parametrización de lego

$$\phi : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Una reparametrización de la pieza de lego $\phi(\mathcal{R})$ es dada por una de la forma

$$\psi = \phi \circ h : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

donde \mathcal{D} es una región admisible y $h : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$ es una función biyectiva, continuamente diferenciable con inversa continuamente diferenciable, llamada *cambio de parámetro*.

La continuidad de las derivadas parciales de un cambio de parámetro $h : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$ permiten observar que el determinante del Jacobiano de h tiene signo constante en \mathcal{D} . En caso que el signo sea positivo diremos que el cambio de parámetros es positivo y en caso contrario diremos que es un cambio de parámetro negativo.

EJEMPLO 8.5. *El cambio de parámetro del ejemplo 8.4 es negativo.*

Una reparametrización obtenida por un cambio de parámetros positiva es llamada una *reparametrización positiva de pieza de lego* y una obtenida usando un cambio de parámetro negativo es llamada una *reparametrización negativa de pieza de lego*.

TAREA 8.3. *Verificar que una reparametrización positiva de pieza de lego da el mismo vector normal unitario y que una reparametrización negativa de pieza de lego da un vector unitario normal opuesto. En particular, reparametrizaciones positivas de pieza de lego definen las mismas cara correctas y reparametrizaciones negativas definen diferentes caras correctas.*

8.3. Integración en Piezas de Lego

Consideremos una pieza de lego S con parametrización de pieza de lego $\phi : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de manera que $\phi(\mathcal{R}) = S$.

Supongamos que tenemos una función continua

$$f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definimos la *integral de f sobre S* como:

$$\int_S f dA = \int_{\mathcal{R}} f(\phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv.$$

La definición anterior nos dice como calcular integrales sobre piezas de lego desde el punto de vista de integrales dobles. Observe que en la definición aparece como factor la norma del producto cruz de las dos derivadas parciales de la parametrización usada ϕ , es decir, la norma del vector ortogonal natural dado por la parametrización.

TAREA 8.4. *Ver que al cambiar la parametrización por su conjugada (dada por el ejemplo 8.4) el valor de la integral no cambia.*

8.3.1. Efecto por Reparametrizaciones en la Integral de Pieza de Legó. Consideremos una parametrización de pieza de lego, digamos

$$P_1 : \Omega_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

y una reparametrización de pieza de lego dada por

$$P_2 : \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Consideremos el cambio de parámetro (función biyectiva y continuamente diferenciable)

$$h = P_2^{-1} \circ P_1 : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2.$$

Tenemos dos posibilidades, la reparametrización es positiva (caso que el determinante de la Jacobiana de h es positivo) ó el caso de que la reparametrización es negativa (caso que el determinante de h es negativo). Por el cambio de variable para integrales múltiples, tenemos que:

$$\begin{aligned} & \int \int_{P_1^{-1}(X)} \delta(P_1(u_1, v_1)) \left\| \frac{\partial P_1}{\partial u_1}(u_1, v_1) \times \frac{\partial P_1}{\partial v_1}(u_1, v_1) \right\| du_1 dv_1 = \\ & = \int \int_{P_2^{-1}(X)} \delta(P_2(u_2, v_2)) \left\| \frac{\partial P_2}{\partial u_2}(u_2, v_2) \times \frac{\partial P_2}{\partial v_2}(u_2, v_2) \right\| du_2 dv_2, \end{aligned}$$

como consecuencia, la integral de pieza de lego no depende de la parametrización escogida (comparar con tarea anterior).

8.4. Legos

Un *lego* en \mathbb{R}^3 es la unión de una colección finita de piezas de lego, digamos $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$, de manera que cualquiera dos de ellas son o bien disjuntas o a lo mas coinciden sobre arcos comunes en sus bordes. Además exigimos que no pueden haber puntos comunes a más de dos piezas de lego.

OBSERVACIÓN 8.2. *Observemos que en la definición de lego no estamos interesados en las parametrizaciones, sólo estamos interesados en los objetos imagenes.*

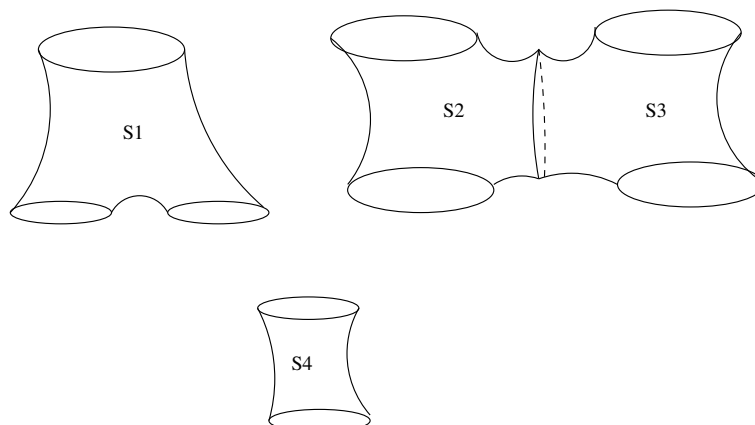


FIGURA 8.1. Un lego hecho con cuatro piezas de lego

EJEMPLO 8.6. *El borde de un cubo en \mathbb{R}^3 es un lego formado por 6 piezas de lego. En la figura 8.1 se muestra otro lego.*

TAREA 8.5. *Verificar con ejemplos concretos que una pieza de lego es un lego y que una pieza de lego puede escribirse como unión de muchas piezas de lego diferentes.*

TAREA 8.6. *Ver que la esfera*

$$S_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

es un lego.

8.5. Legos Orientados

Consideremos un lego que es la unión de una colección finita de piezas de lego, digamos $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$. Como hemos dicho antes, no hemos tomado en consideración las parametrizaciones de las piezas de lego involucradas.

Supongamos que hemos escogido parametrizaciones de las piezas de lego $\phi_j : \mathcal{R}_j \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de manera que $\phi_j(\mathcal{R}_j) = \Sigma_j$, para cada $j = 1, \dots, k$. Si tenemos que cada vez que hay un par de piezas con borde común las orientaciones son opuestas, entonces diremos que el lego *es orientado con tales parametrizaciones*. En caso contrario diremos que el lego *no es orientado con tales parametrizaciones*.

OBSERVACIÓN 8.3. *Observemos que dadas las parametrizaciones de las piezas de lego, podemos cambiar algunas parametrizaciones por el método dado en el ejemplo 8.4. Este proceso cambia la cara correcta correspondiente. En algunos casos, este procedimiento permite construir nuevas parametrizaciones con las cuales el lego queda orientado, pero también hay ejemplos donde este proceso no funciona.*

TAREA 8.7. *Construya un lego formado por dos piezas de lego (cada una imagen de un cuadrado) de manera que no es posible encontrar parametrizaciones para que quede orientado. Ind: Piense en la banda de Möbius.*

TAREA 8.8. *Consideremos la esfera*

$$S_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

que ya sabemos es un lego.

- (i) *Escriba S_R como una unión de dos piezas de lego de manera que esta sea orientada.*
- (ii) *Escriba S_R como una unión de dos piezas de lego de manera que esta no sea orientada.*

8.6. Superficies compactas

Para nosotros una *superficie compacta* será un lego con elecciones de parametrizaciones de sus piezas de lego. Diremos que la superficie es orientada si el lego es orientado con esta elección de parametrizaciones.

8.7. Superficies cerradas

Una *superficie cerrada* es una superficie compacta la cual no tiene bordes, en otras palabras, es posible encontrar un sólido $V \subset \mathbb{R}^3$ cuyo borde es tal superficie. Diremos que la superficie es orientada si el lego es orientado con tal elección de parametrizaciones.

8.8. Integración en Superficies Compactas

Consideremos una superficie compacta S que es dada por un lego que es unión de las piezas de lego $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$, y con las parametrizaciones de piezas de lego $\phi_j : \mathcal{R}_j \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de manera que $\phi_j(\mathcal{R}_j) = \Sigma_j$, para cada $j = 1, \dots, k$. Luego, en particular,

$$S = \bigcup_{j=1}^n \Sigma_j.$$

Supongamos que tenemos una función continua

$$f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definimos la *integral de f sobre S* como:

$$\int_S f dA = \sum_{j=1}^k \int_{\Sigma_j} f dA = \sum_{j=1}^k \int_{\mathcal{R}_j} f(\phi_j(u, v)) \left\| \frac{\partial \phi_j}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi_j}{\partial v}(u, v) \right\| du dv.$$

Como ya hemos visto que la integral de cada pieza de lego no depende de la parametrización usada, vemos que la integral de superficie arriba definida tampoco. De esta manera, la anterior es en realidad una definición de integral de legos.

8.9. Área de Superficies

Utilizando la función $f(p) \equiv 1$, para cada $p \in S$, en la definición de integral de superficie obtenemos el *area de superficie* de ella por:

$$\text{Area}(S) = \int_S 1 \, dA = \sum_{j=1}^k \underbrace{\int_{\Sigma_j} 1 \, dA}_{\text{Area}(\Sigma_j)} = \sum_{j=1}^k \int_{\mathcal{R}_j} \left\| \frac{\partial \phi_j}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi_j}{\partial v}(u, v) \right\| du dv.$$

En particular,

$$\text{Area}(S) = \sum_{j=1}^k \text{Area}(\Sigma_j).$$

TAREA 8.9. Sea $0 < \epsilon_n < \epsilon$, donde $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ de manera que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = \epsilon.$$

Considere el conjunto

$$S_\epsilon^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2\}.$$

Considere la región admisible

$$\mathcal{R}_n = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq \epsilon_n^2\}.$$

(i) Sean

$$\phi_{1n} : \mathcal{R}_n \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto \left(u, v, +\sqrt{\epsilon^2 - u^2 - v^2} \right)$$

$$\phi_{2n} : \mathcal{R}_n \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto \left(u, -v, -\sqrt{\epsilon^2 - u^2 - v^2} \right)$$

$$\phi_{3n} : \mathcal{R}_n \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto \left(u, v, -\sqrt{\epsilon^2 - u^2 - v^2} \right)$$

Verificar que todas ellas son parametrizaciones de piezas de lego.

(ii) Sea S_{1n} la superficie dada por el lego obtenido como unión de las piezas de lego $\phi_{1n}(\mathcal{R}_n)$ y $\phi_{2n}(\mathcal{R}_n)$ con las parametrizaciones dadas por $\{\phi_{1n}, \phi_{2n}\}$.

Sea S_{2n} la superficie dada por el lego obtenido como unión de las piezas de lego $\phi_{1n}(\mathcal{R}_n)$ y $\phi_{3n}(\mathcal{R}_n)$ con las parametrizaciones dadas por $\{\phi_{1n}, \phi_{3n}\}$.

Ver que $\text{Area}(S_{1n}) = \text{Area}(S_{2n})$. ¿Cuánto vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Area}(S_{1n})?$$

8.10. Plano Tangente

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una región admisible y $P : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de la pieza de lego $S = P(\Omega)$. En este caso, por cada punto $(u, v) \in \Omega$ tenemos asignado un único punto $p = P(u, v) \in S$. Podemos definir el plano tangente de S en el punto p , denotado por $T_p S$, como

$$T_p(S) = \{\gamma'(0) : \gamma : (-1, 1) \rightarrow S; \gamma(0) = p; \gamma \text{ curva diferenciable}\}$$

No es difícil ver que $T_p S$ es un espacio vectorial real. De hecho, por la regla de la cadena

$$T_p S = DP(u, v)(\mathbb{R}^2),$$

donde

$$DP(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

es la diferencial en (u, v) de la función P , la cual es lineal. Luego:

$$T_p S = \left\langle \frac{\partial P}{\partial u}(u, v), \frac{\partial P}{\partial v}(u, v) \right\rangle = \left\{ a \frac{\partial P}{\partial u}(u, v) + b \frac{\partial P}{\partial v}(u, v) : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ya que hemos puesto la condición de

$$\frac{\partial P}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial P}{\partial v}(u, v) \neq (0, 0, 0),$$

tenemos que los vectores

$$\frac{\partial P}{\partial u}(u, v) \text{ y } \frac{\partial P}{\partial v}(u, v)$$

son linealmente independientes sobre \mathbb{R} . En particular,

$$\dim_{\mathbb{R}}(T_p S) = 2$$

TAREA 8.10. *En los ejemplos anteriores calcular de manera explícita los planos tangentes. En el caso de las piezas de lego dadas por*

$$S = \{(x, y, z) \in W : f(x, y, z) = a\},$$

donde W es región admisible y $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable con $a \in f(W)$ valor regular de f , verificar que

$$T_p S = \nabla f(p)^\perp,$$

donde $\nabla f(p)$ denota el vector gradiente de f en el punto $p \in W$ y $\nabla f(p)^\perp$ denota el subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 formado de aquellos vectores ortogonales a $\nabla f(p)$

8.11. Flujos en Superficies Compactas Orientadas

Supongamos que tenemos un campo de fuerzas continuo (pensemos por ejemplo en un fluido y la fuerza que este produce en cada punto) que actúa sobre una región abierta Ω en el espacio \mathbb{R}^3 , digamos

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Consideremos una superficie compacta $S = \cup_{j=1}^N S_j \subset \Omega$, donde S_j es pieza de lego. Si estamos interesados en conocer la cantidad neta de fluido que pasa a través de tal superficie, entonces debemos tener una noción de exterior e interior. Esto no es problema **si nuestra superficie es orientada** ya que en tal caso tenemos dos caras, una de ellas es la correcta (que en este caso es la unión de las caras correctas de las piezas de lego S_j que la conforman). En esta situación orientada, el vector unitario normal n_S de S apunta en dirección de la cara correcta. Recuerde que n_S coincide con el vector unitario normal de cada pieza de lego S_j que la conforma, es decir,

$$n_S = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|},$$

donde ϕ es la parametrización de la pieza de lego S_j donde estamos mirando.

Ahora, podemos considerar la componente normal de tal fuerza respecto a tal superficie, es decir,

$$F \cdot n_S,$$

y sumarlas todas sobre S , es decir, bajo las condiciones de orientabilidad, el flujo neto es dado por

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot n_S \, dA &= \sum_{j=1}^N \int_{S_j} F \cdot n_{S_j} \, dA = \\ &= \sum_{j=1}^N \int \int_{\mathcal{R}_j} F(\phi_j(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial \phi_j}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi_j}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \phi_j}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi_j}{\partial v}(u, v) \right\|} \, dudv, \end{aligned}$$

donde

$$\phi_j : \mathcal{R}_j \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

corresponde a la parametrización de la pieza de lego S_j .

TAREA 8.11. *Calcular el flujo que produce el campo de vectores*

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x, y, 0),$$

sobre la superficie

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z, z \leq 4\}$$

orientada de manera que la cara correcta es la que se ve desde el punto $(0, 0, 5)$. Ahora utilice la parametrización conjugada y vea que la integral cambia de signo.

8.12. El Teorema de Stokes

Podemos pensar en una pieza de lego como una región admisible que se ha deformado, por ejemplo, cuando tenemos un disco de vinilo que fué puesto al Sol por algunas horas. Para regiones admisibles tenemos la fórmula de Green la cual permite relacionar una integral de línea sobre el borde de la región admisible (orientada de manera que la región quede a la izquierda) y una integral doble sobre la región admisible. Lo que procederemos a ver es como esa fórmula es transformada bajo la deformación mencionada, es decir, como se puede leer en piezas de lego. Una vez visto esto, extenderemos esto a superficies compactas orientadas en general.

Consideremos una parametrización de pieza de lego

$$\phi : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

donde

$$\phi(\mathcal{R}) = S.$$

Supongamos que tenemos un campo de fuerzas con primeras derivadas parciales continuas

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

donde Ω es una región abierta tal que $S \subset \Omega$.

Denotemos por γ la(s) curva(s) borde de S orientadas de manera que la cara correcta de S está a la izquierda. Observemos que si denotamos por α la(s) curva(s) borde de \mathcal{R} orientadas de manera que \mathcal{R} quede a la izquierda, entonces tenemos

que $\gamma = \phi \circ \alpha$. Esta igualdad nos permite calcular, usando cambio de variable, la siguiente igualdad:

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\alpha} F(\phi(\alpha)) \cdot D\phi(\alpha)(d\alpha),$$

donde $D\phi(\alpha)$ denota la diferencial de ϕ en α . Escribiendo $\alpha = (u, v)$, tenemos que la igualdad anterior es dada por:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot d\gamma &= \int_{\alpha} F(\phi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) du + \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) dv \right) = \\ &= \int_{\alpha} F(\phi(u, v)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) du + F(\phi(u, v)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) dv. (*) \end{aligned}$$

Ahora consideremos el campo de vectores planar

$$G : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (u, v) \mapsto (A(u, v), B(u, v)),$$

donde

$$A(u, v) = F(\phi(u, v)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v),$$

$$B(u, v) = F(\phi(u, v)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v).$$

De esta manera (*) queda escrita como

$$\int_{\alpha} Adu + Bdv.$$

Observemos que como las derivadas parciales de segundo orden de la parametrización ϕ existen y son continuas, tenemos que el campo de vectores G tiene sus primeras derivadas parciales continuas. De esta manera, poder hacer uso de la fórmula de Green para el campo G sobre la región admisible \mathcal{R} , obteniendo la igualdad

$$\int_{\alpha} Adu + Bdv = \int \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) dudv. (**)$$

TAREA 8.12. Verifique la igualdad

$$\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} = (\nabla \times F)(\phi(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right\|}$$

Ya que vale la igualdad

$$\int_S (\nabla \times F) \cdot n_S dA = \int \int_{\mathcal{R}} (\nabla \times F)(\phi(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right\|} dudv,$$

tenemos, una vez hecha la tarea, que la siguiente fórmula es válida:

TEOREMA 8.1 (Teorema de Stokes para piezas de lego). *Consideremos una parametrización de pieza de lego*

$$\phi : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

donde

$$\phi(\mathcal{R}) = S.$$

Supongamos que tenemos un campo de fuerzas con primeras derivadas parciales continuas

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

donde Ω es una región abierta tal que $S \subset \Omega$. Denotemos por γ la(s) curva(s) borde de S orientadas de manera que la cara correcta de S está a la izquierda. entonces vale la igualdad:

$$\int_S (\nabla \times F) \cdot n_S \, dA = \int_\gamma F \cdot d\gamma$$

La fórmula anterior puede ser extendidas a superficies compactas usando la propiedad aditiva de integrales.

COROLARIO 8.2. *Consideremos una superficie compacta (no necesariamente orientada)*

$$S = \cup_{j=1}^N S_j$$

y tenemos un campo de fuerzas F actuando sobre S con primeras derivadas parciales continuas, entonces vale, por lo anterior, que

$$\int_S (\nabla \times F) \cdot n_S \, dA = \sum_{j=1}^N \int_{S_j} (\nabla \times F) \cdot n_{S_j} \, dA = \sum_{j=1}^N \int_{\gamma_j} F \cdot d\gamma_j,$$

donde γ_j denota el borde de la pieza de lego S_j orientada de manera que la cara correcta quede a la izquierda.

En el resultado anterior puede ocurrir que dos piezas de lego tengan una porción de su borde en común. Aquí hay dos posibilidades, que sus orientaciones naturales sean opuestas o coincidan. En caso que ellas sean opuestas, las respectivas integrales de línea se cancelaran en tal porción común. En el otro caso, esto no será así. Como el borde de S corresponde a la unión de los bordes no comunes de sus piezas de lego, tenemos la siguiente consecuencia.

TEOREMA 8.3 (Teorema de Stokes para superficies compactas orientadas). *Consideremos una superficie compacta orientada S y tenemos un campo de fuerzas F actuando sobre S con primeras derivadas parciales continuas, entonces vale que*

$$\int_S (\nabla \times F) \cdot n_S \, dA = \int_\gamma F \cdot d\gamma,$$

donde γ denota el borde de S orientada de manera que la cara correcta quede a la izquierda.

TAREA 8.13. Considere una superficie cerrada orientada S y un campo de fuerzas F actuando sobre S con primeras derivadas parciales continuas. Verifique que

$$\int_S (\nabla \times F) \cdot n_S \, dA = 0.$$

En particular, si F es campo rotacional de otro campo G , entonces el flujo de F a lo largo de S es cero.

TAREA 8.14.

- (i) Considere una superficie compacta orientada S que es la imagen de un disco por alguna parametrización y un campo de fuerzas F actuando sobre S con primeras derivadas parciales continuas y que sea irrotacional, es decir, $\nabla \times F = 0$. Verifique que F es conservativo sobre S , es decir, existe un potencial $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ para F .
- (ii) Ver que la situación en (i) no es cierta en general si S es cualquier superficie compacta orientada.
- (iii) Sea Ω el complemento de un número finito de puntos en \mathbb{R}^3 y sea $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo continuo con primeras derivadas parciales continuas y que sea irrotacional. Concluir que F tiene un potencial sobre Ω , es decir, es campo gradiente (equivalentemente, es conservativo).

8.13. Teorema de la Divergencia

Recordemos que en la fórmula de Green tenemos una región plana (admisibles) acotada por un número finito de curvas cerradas y un campo de fuerzas actuando en ella. Esta fórmula nos permite comparara información sobre el interior de la región y su borde. En esta sección procederemos en la misma dirección. Para esto, debemos ver que objetos reemplazan a las regiones admisibles del plano.

Una *región admisible espacial* $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ será un dominio acotado por un número finito de superficies cerradas.

EJEMPLO 8.7. Una bola de radio $R > 0$ es un ejemplo de una región admisible espacial. Otros ejemplos son dados por cubos, tetraedros, etc.

8.13.1. Situación de cubos. Consideremos un cubo $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3$ de vértices (a_1, b_1, c_1) , (a_1, b_1, c_2) , (a_1, b_2, c_1) , (a_1, b_2, c_2) , (a_2, b_1, c_1) , (a_2, b_1, c_2) , (a_2, b_2, c_1) , (a_2, b_2, c_2) , donde $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, $c_1 < c_2$.

Consideremos parametrizaciones de las piezas de lego de la superficie cerrada S borde del cubo de manera que quede orientada y tal que el vector normal unitario siempre está en dirección exterior al cubo. Por ejemplo,

$$\phi_1 : [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u, -v, c_1)$$

$$\phi_2 : [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u, v, c_2)$$

$$\phi_3 : [a_1, a_2] \times [c_1, c_2] \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u, b_1, v)$$

$$\phi_4 : [a_1, a_2] \times [c_1, c_2] \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u, b_1, -v)$$

$$\phi_5 : [b_1, b_2] \times [c_1, c_2] \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (a_2, u, v)$$

$$\phi_6 : [b_1, b_2] \times [c_1, c_2] \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (a_1, u, -v)$$

TAREA 8.15. Verificar que las parametrizaciones anteriores son tales que el borde del cubo queda orientado y de manera que el normal unitario apunta en dirección exterior al cubo.

Denotemos por S_j la cara parametrizada por ϕ_j , para $j = 1, \dots, 6$.

Consideremos un campo de fuerzas F , con primeras derivadas parciales continuas, definido sobre una región abierta que contenga nuestro cubo.

TAREA 8.16.

(1) Calcule la integral de superficie

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot n_S dA &= \int_{S_1} F \cdot n_{S_1} dA + \int_{S_2} F \cdot n_{S_2} dA + \int_{S_3} F \cdot n_{S_3} dA + \\ &+ \int_{S_4} F \cdot n_{S_4} dA + \int_{S_5} F \cdot n_{S_5} dA + \int_{S_6} F \cdot n_{S_6} dA \end{aligned}$$

(2) Calcular la integral triple

$$\int \int \int_{\mathcal{Q}} \nabla \cdot F \underbrace{dV}_{dx dy dz}.$$

(3) Concluya de sus resultados la igualdad

$$\int_S F \cdot n_S dA = \int \int \int_{\mathcal{Q}} \nabla \cdot F dV.$$

8.13.2. Unión de Cubos. Consideremos una unión finita de cubos, de manera que ellos son dos a dos disjuntos ó a lo más tiene parte de su borde en común (en cuyo caso es una pieza de lego). Llamemos \mathcal{V} a tal unión.

Cuando hay dos cubos compartiendo parte de su borde, tenemos que los vectores normales unitarios exteriores son opuestos, es decir, para la pieza de lego común tenemos que las orientaciones son opuestas.

TAREA 8.17. Considere una pieza de lego S y considere una parametrización ϕ de ella. Sea ψ una reparametrización negativa de S . Verifique que el valor absoluto de la integral

$$\int_S f dA$$

no cambia si usamos cualquiera de esas parametrizaciones, pero que si cambia el signo.

Sea $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de vectores con primeras derivadas parciales continuas y de manera que $\mathcal{V} \subset \Omega$. Usando lo anterior y el hecho que el borde S de \mathcal{V} es la unión de los bordes de los cubos que no son comunes a dos ellos, tenemos que la fórmula dada para cubos nos da la fórmula:

$$\int_S F \cdot n_S dA = \int \int \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot F dV,$$

8.13.3. Situación General. Una región admisible espacial \mathcal{V} puede escribirse como unión finita ó infinta numerable de cubos, de manera que ellos son dos a dos disjuntos ó a lo más tiene parte de su borde en común. Esta información y lo anterior permite obtener la siguiente fórmula.

TEOREMA 8.4 (Teorema de la Divergencia). *Sea \mathcal{V} una región admisible con borde S y $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de vectores con primeras derivadas parciales continuas y de manera que $\mathcal{V} \subset \Omega$, entonces*

$$\int_S F \cdot n_S dA = \int \int \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot F dV,$$

donde S es parametrizada de manera orientada y tal que el vector unitario normal esté apuntando en dirección exterior a la región.

TAREA 8.18. *Concluir que si tenemos un campo F con divergencia nula y \mathcal{V} es una región admisible sobre la cual actúa tal campo, entonces el flujo neto sobre el borde S es cero. ¿Qué nos está diciendo este hecho?*

OBSERVACIÓN 8.4. *El teorema de la divergencia nos permite relacionar integrales de superficies cerradas orientadas con integrales triples. Hay casos donde la integral de superficie es fácil de calcular pero no así la triple y hay casos donde la situación es en la otra dirección.*

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

9.1. Motivación

Como motivación a este capítulo podemos considerar el siguiente problema. Supongamos que en cierta región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ existe un campo de fuerzas actuando, digamos

$$F : (a, b) \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n : (t, x) \mapsto F(t, x).$$

La razón de incorporar la variable $t \in (a, b)$ es el hecho que nuestro campo de fuerzas podría cambiar con el tiempo. Ahora, si colocamos una partícula en la posición $x_0 \in \Omega$ en el momento $t_0 \in (a, b)$ y suponemos que tal partícula no opone resistencia a tal campo de fuerzas, entonces

¿Podemos decidir donde se encontrará después de cierto tiempo?

Otra manera de motivar (en una situación unidimensional) el temario de este capítulo es el siguiente. Supongamos que tenemos una cantidad $x(t) \in \mathbb{R}$ la cual varía con el tiempo t . Si sabemos la cantidad en un momento dado t_0 y sabemos una relación entre esta cantidad $x(t)$, su razón de cambio $x'(t)$ y el momento t ,

¿Podemos obtener el valor $x(t)$?

9.2. Problema de Cauchy

Si queremos modelar, digamos el primer problema, entonces necesitamos encontrar el movimiento de esa partícula, en caso de existir, el cuál podemos asumir es una función diferenciable

$$x : (t_0 - \epsilon_1, t_0 + \epsilon_2) \subset (a, b) \rightarrow \Omega$$

la cuál debe satisfacer que en cada momento $t \in (t_0 - \epsilon_1, t_0 + \epsilon_2)$ su vector velocidad $x'(t)$ es igual al campo de fuerzas en esa posición $F(t, x(t))$. En otras palabras, debemos considerar el problema de encontrar soluciones $x = x(t)$ como antes al sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x'(t) &= F(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

llamado un *problema de Cauchy*. En el caso que $F(t, x) = F(x)$, es decir, F no depende de la variable t , diremos que el problema de Cauchy es *autónomo*.

¿Se puede resolver el problema de Cauchy?

9.3. Existencia de Soluciones

EJEMPLO 9.1 (A veces no hay soluciones). *Consideremos el caso en que $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$ y*

$$F(t, x) = f(t) = \begin{cases} 0, & t \in \mathbb{Q}; \\ 1, & t \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Observemos que $F(t, x) = f(t)$ no es una función integrable (integral de Riemann), luego no podemos resolver el problema $x'(t) = f(t)$.

TEOREMA 9.1 (Existencia de soluciones). *Si en el problema de Cauchy tenemos que $F(t, x)$ es continua, entonces tenemos existencia de soluciones.*

9.4. Unicidad de Soluciones

EJEMPLO 9.2. *Consideremos de nuevo $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$ y la función continua $F(t, x) = 3x^{3/2}$. En este caso, si tomamos $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, vemos que el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) &= 3x(t)^{3/2} \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones, por ejemplo, para cada $r > 0$ basta considerar

$$x_r(t) = \begin{cases} 0, & t < r; \\ (t-r)^3, & t \geq r. \end{cases}$$

TEOREMA 9.2 (Unicidad de soluciones: Teorema de Picard). *Supongamos que para cada $(t_0, x_0) \in (a, b) \times \Omega$ existen $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, $M > 0$ tales que*

$$I = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \subset (a, b),$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \delta\} \subset \Omega, \quad y$$

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq M\|x - y\|,$$

para todos los pares $(t, x), (t, y) \in I \times B \subset (a, b) \times \Omega$. Entonces:

- (1) *Existe una única solución $x = x(t)$ al problema de Cauchy, donde $x(t)$ está definida en un algún intervalo $J \subset I$ tal que $t_0 \in J$.*
- (2) *Si tenemos que $\|F(t, x)\| \leq R$ para todos los puntos $(t, x) \in I \times B$, entonces podemos ser un poco más precisos con el dominio de la solución $x = x(t)$. Si η es el mínimo valor entre ϵ y δ/R , entonces $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ está contenido en dominio de definición de $x = x(t)$.*

OBSERVACIÓN 9.1. *Observemos que si $F(t, x)$ es continua y tiene las primeras derivadas parciales continuas*

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n},$$

entonces, como consecuencia del teorema del valor intermedio, tenemos las condiciones del teorema anterior, luego el problema de Cauchy tendrá existencia y unicidad de soluciones.

EJEMPLO 9.3. *Por ejemplo, consideremos el problema autónomo*

$$x' = \frac{1}{x}$$

En este caso $F(t, x) = f(x) = 1/x$ está definida para todo valor de t y sólo para valores de $x \neq 0$. La función $x(t) = \ln(t)$ es solución y su dominio de definición es $J = (0, +\infty)$.

9.4.1. Caso de no restricción en fase.

TEOREMA 9.3. *Si $F(t, x)$ es continua en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ y existe $M > 0$ tal que*

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq M\|x - y\|,$$

para todos los pares $(t, x), (t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$, entonces el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= F(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

donde $t_0 \in [a, b]$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tiene una única solución $x = x(t)$ y está definida en $[a, b]$.

Si tenemos un intervalo abierto (a, b) , entonces podemos aproximarlo interiormente por intervalos cerrados de la forma $[a + \epsilon, b - \epsilon]$, donde $\epsilon > 0$ tiende a cero. Esta observación y el teorema anterior permite dar como consecuencia el siguiente resultado.

COROLARIO 9.4. *Si $F(t, x)$ es continua en $(a, b) \times \mathbb{R}^n$ y supongamos que para cada $\epsilon > 0$ tal que $[a + \epsilon, b - \epsilon] \subset (a, b)$ existe $M_\epsilon > 0$ tal que*

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq M_\epsilon\|x - y\|,$$

para todos los pares $(t, x), (t, y) \in [a + \epsilon, b - \epsilon] \times \mathbb{R}^n$, entonces el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= F(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

donde $t_0 \in (a, b)$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tiene una única solución $x = x(t)$ y está definida en (a, b) .

9.4.2. Caso lineal.

COROLARIO 9.5 (Ecuaciones diferenciales lineales). *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y consideremos una colección de funciones continuas*

$$a_{ij}, b_i : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Por cada $t \in I$ sean $a_{ij}(t), b_i(t) \in \mathbb{R}$ dados y consideremos la transformación lineal

$$L_t(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}(t)x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}(t)x_j \right).$$

Si definimos $F(t, x) = L_t(x) + (b_1(t), \dots, b_n(t))$, entonces el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= F(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

donde $t_0 \in I$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tiene una única solución $x = x(t)$ y está definida en I .

9.5. Método de Aproximaciones Sucesivas

Supongamos que tenemos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= F(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

donde $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua tal que existe $M > 0$ tal que

$$(*) \quad \|F(t, x) - F(t, y)\| \leq M\|x - y\|,$$

para todos los pares $(t, x), (t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$. Luego, sabemos que para cada $t_0 \in [a, b]$ y cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe una única solución $x = x(t)$, la cual está definida en $[a, b]$. Una manera de obtener aproximaciones de tal solución es la siguiente. Observemos que la solución $x = x(t)$ debe satisfacer la ecuación integral

$$(**) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, x(\tau)) d\tau$$

Si consideramos la sucesión de funciones $x_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, definidas de manera recursiva por

$$\begin{cases} x_0(t) &= x_0; \\ x_{r+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, x_r(\tau)) d\tau; \end{cases}$$

entonces la condición (*) asegura que esta es una sucesión uniformemente convergente. El límite $x(t)$ naturalmente resuelve la ecuación integral (**), en particular, define una solución (luego la única solución) del problema de Cauchy anterior.

TAREA 9.1. Considere el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)^2 \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

Ahora, sea $x(t)$ la solución del problema de Cauchy. Observe que

$$\int_0^t \frac{x'(s)}{x^2(s)} ds = \int_0^t ds = t$$

Haga el cambio de variable

$$x = x(s)$$

y obtenga que

$$x(t) = \frac{1}{1-t}$$

Usar el método de aproximaciones anterior para comparar la aproximaciones obtenidas con la solución exacta.

9.6. Sistemas Autónomos

Una ecuación diferencial de primer orden es llamada autónoma si es de la forma

$$x'(t) = F(x(t))$$

Un problema de Cauchy es llamado autónomo si la ecuación diferencial es autónoma.

Partamos observando el hecho que todo problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= F(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

ó bien es autónomo, es decir $F(t, x) = F(x)$, ó bien puede transformarse en uno autónomo al considerar:

$$\begin{cases} z = z(t) &= (t, x(t)) \\ G(z) &= F(t, x) \end{cases}$$

y considerar

$$(*) \begin{cases} z'(t) &= G(z(t)) \\ z(t_0) &= z_0 = (t_0, x_0) \end{cases}$$

Observemos que en este caso, si $x(t)$ es solución al problema original, entonces $z(t) = (t, x(t))$ es solución del nuevo.

Supongamos en el resto de esta sección que tenemos un sistema de cauchy autónomo como en (*) donde $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la siguiente propiedad (las condiciones necesarias para usar el teorema de unicidad de soluciones): para cada $z_0 \in \Omega$ existen $\delta > 0, M > 0$ tales que

$$B = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z - z_0\| \leq \delta\} \subset \Omega, \text{ y} \\ \|G(z) - G(w)\| \leq M\|z - w\|,$$

para todos los puntos $z, w \in B \subset \Omega$. Entonces el teorema de unicidad de soluciones nos asegura que:

- (1) Existe una única solución $z = z(t)$ al problema de Cauchy (*), donde $z(t)$ está definida en un algún intervalo $J \subset \mathbb{R}$ tal que $t_0 \in J$.
- (2) Si tenemos que $\|G(z)\| \leq R$ para todos los puntos $z \in B$, entonces podemos ser un poco más precisos con el dominio de la solución $z = z(t)$. Si $\eta = \delta/R$, entonces $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ está contenido en dominio de definición de $z = z(t)$.

OBSERVACIÓN 9.2. *Por otro lado, si tenemos que $\Omega = \mathbb{R}^n$, entonces podemos verificar, como consecuencia al corolario del teorema 9.3 que si para cada $\delta > 0$ existe $M_\delta > 0$ tal que $\|G(z) - G(w)\| \leq M_\delta \|z - w\|$, para todos los puntos $z, w \in B_\delta$, donde B_δ es la bola cerrada de radio δ con centro en 0, las soluciones $z = z(t)$ están definidas en todo \mathbb{R} . Ejemplos de este caso es cuando G es:*

- (i) una función lineal, ó
- (ii) una función polinomial (cada función coordenada es polinomial en las variables).

Supongamos que $z : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ es una solución al problema (*). Sean $t_1 < t_2 \in J$ y $x_1 = z(t_1)$. Si definimos la función $w(t) = z(t + t_1 - t_2)$, definida en el intervalo J^* (que es J trasladado por $t_1 - t_2$), entonces vemos que

$$w'(t) = z'(t + t_1 - t_2) = G(z(t + t_1 - t_2)) = G(w(t))$$

$$w(t_2) = z(t_1) = x_1$$

De esta manera, la unicidad de soluciones nos da el siguiente hecho.

TEOREMA 9.6. *Las imágenes de soluciones diferentes de un problema de Cauchy autónomo son disjuntas y la imagen de cada solución es una curva simple cerrada ó bien una curva que no se autointersecta.*

Si llamamos a la imagen de cualquier solución $z = z(t)$ de un sistema autónomo que contiene al punto z_0 como la *órbita* de z_0 , entonces lo anterior nos dice que dos órbitas son iguales ó son disjuntas. En particular, si tenemos una órbita que tiene autointersección, entonces lo anterior nos dice que tal órbita debe ser una curva simple cerrada

TAREA 9.2. *Verificar que la relación de pertenencia a la misma órbita define una relación de equivalencia en Ω donde las clases de equivalencia son exactamente las órbitas.*

9.7. Problemas Unidimensionales

En esta sección consideraremos problemas de Cauchy del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

donde $f : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$.

9.7.1. Caso lineal simple. Cuando tenemos un problema de Cauchy del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

donde $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces estamos bajo las condiciones de existencia y unicidad de soluciones. En este caso, si integramos la igualdad $x'(t) = f(t)$, obtenemos

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s) ds$$

9.7.2. Caso de variable separadas. Cuando tenemos un problema de Cauchy del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)b(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

donde $a : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $b : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable, entonces estamos bajo las condiciones de existencia y unicidad de soluciones. En este caso la igualdad $x'(t) = a(t)b(x(t))$ puede escribirse de la manera siguiente (en aquellos puntos $(t, x(t))$ donde $b(x(t)) \neq 0$, como

$$\frac{x'(t)}{b(x(t))} = a(t)$$

Al integra obtenemos

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{b(x(s))} ds = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

Si hacemos el cambio de variables $x = x(s)$, la anterior queda

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{b(x)} = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

de donde obtenemos una relación implícita entre $x(t)$ y t .

9.7.3. Ecuaciones lineales homogéneas. Cuando tenemos un problema de Cauchy del tipo

$$\begin{cases} x'(t) + a(t)x(t) = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

donde $a : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces estamos bajo las condiciones de existencia y unicidad de soluciones. En este caso las soluciones están definidas en el intervalo (α, β) . Este es un caso particular de una ecuación de variable separada. Luego, la solución es de la forma

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x} = - \int_{t_0}^t a(s) ds$$

es decir

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

TEOREMA 9.7. Si x_1 y x_2 son soluciones de

$$x'(t) + a(t)x(t) = 0$$

donde $a : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces para todo número real λ vale que $x_1 + \lambda x_2$ es también solución. Esto nos dice que el conjunto de las soluciones de esta ecuación es un espacio vectorial real. Este espacio vectorial es de dimensión 1, es decir, existe una solución de manera que todas las otras son un múltiplo de ella.

DEMOSTRACIÓN. La primera parte sale del hecho que

$$(x_1 + \lambda x_2)'(t) = X_1'(t) + \lambda x_2'(t).$$

Para ver la segunda parte, sea x_1 la única solución que satisface $x_1(t_0) = 1$, para cierto $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Si x_2 es otra solución y denotamos por $x_2(t_0) = m$, entonces vemos que $m x_1(t)$ es solución tal que $m x_1(t_0) = x_2(t_0)$. Ahora, la unicidad de soluciones nos asegura que $m x_1 = x_2$. \square

9.7.4. Ecuaciones lineales no-homogéneas. Cuando tenemos un problema de Cauchy del tipo

$$\begin{cases} x'(t) + a(t)x(t) = b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

donde $a, b : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas y $b(t) \neq 0$, entonces estamos bajo las condiciones de existencia y unicidad de soluciones. Para buscar la solución, primero observamos que el sistema homogéneo asociado $x'(t) + a(t)x(t) = 0$ tiene soluciones del tipo

$$x_h(t) = k e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

donde $k \in \mathbb{R}$.

La idea es buscar una solución del tipo

$$x(t) = k(t) e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

donde $k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable. Al introducir esta función candidata a la ecuación $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$ obtenemos la igualdad siguiente

$$k'(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} = b(t)$$

de donde obtenemos por integración que

$$k(t) = c_0 + \int_{t_0}^t b(\tau)e^{\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds} d\tau$$

donde $c_0 \in \mathbb{R}$, y luego,

$$x(t) = \left(c_0 + \int_{t_0}^t b(\tau)e^{\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds} d\tau \right) e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

Como además queremos tener $x(t_0) = x_0$, esto obliga a tener

$$x(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^t b(\tau)e^{\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds} d\tau \right) e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

El método utilizado para encontrar la solución $x(t)$ es llamado el *método de variación de parámetros*.

EJEMPLO 9.4 (Circuito RL). *La ley de tensiones de Kirchhoff nos dice que la suma algebraica de todas las caídas de voltaje instantáneas alrededor de cualquier circuito cerrado es cero, es decir, el voltaje aplicado a un circuito cerrado es igual a la suma de las caídas de voltaje en el resto del circuito.*

Si denotamos por $I(t)$ (medida en amperes) la corriente, en un momento t , en el circuito, entonces tenemos que una resistencia de R ohms produce una caída de voltaje de $E_R = RI$ volts y un inductor de L henrys produce una caída de voltaje de $E_L = LI'$ volts.

Así, si tenemos un circuito muy simple, donde sólo hay una resistencia de R ohms y una inductancia de L henrys, donde hay un voltaje de $E(t)$ volts, entonces la ley de tensiones de Kirchhoff nos dice que

$$LI'(t) + RI(t) = E(t)$$

es decir, obtenemos una ecuación diferencial lineal de primer orden, la cual es homogénea si $E(t) = 0$. En este caso,

$$I(t) = \left(I(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{E(\tau)}{L} e^{(\tau-t_0)\frac{R}{L}} d\tau \right) e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}$$

EJEMPLO 9.5 (Problemas de mezcla). *Supongamos que tenemos un estanque el cual contiene 200 litros de agua sobre la cual se han disuelto 40 gramos de sal. Ahora, suponemos que al estanque entran 5 litros de agua con sal por minuto, de manera que en cada litro hay 2 gramos de sal, y al mismo tiempo salen 5 litros de salmuera del estanque. Estamos asumiendo que la mezcla en el estanque es homogénea. Si denotamos por $x(t)$ la cantidad de sal que en el estanque al momento t , entonces tenemos que $x'(t)$, la razón de cambio de tal cantidad de sal, es igual a la diferencia entre la cantidad de sal que entra y la que sale; luego*

$$x'(t) = (5 \times 2 \text{ gramos/min}) - (5 \times \frac{x(t)}{200} \text{ gramos/min})$$

es decir

$$\begin{aligned}x'(t) &= 10 - \frac{5}{200}x(t) \\x(0) &= 40\end{aligned}$$

De esta manera,

$$x(t) = \left(40 + \int_0^t 10e^{\int_0^\tau \frac{5}{200} ds} d\tau \right) e^{-\int_0^t \frac{5}{200} ds}$$

es decir

$$x(t) = 40e^{-\frac{t}{40}} \left(10e^{\frac{t}{40}} - 9 \right)$$

EJEMPLO 9.6 (Ley de enfriamiento de Newton). *La ley de enfriamiento de Newton dice que la razón de cambio con respecto al tiempo de la temperatura de una bola es proporcional a la diferencia entre la temperatura de esta y la del medio ambiente. De esta manera, si $T(t)$ denota la temperatura de la bola al momento t y denotamos por $S(t)$ la temperatura del medio ambiente al momento t , entonces la ley anterior nos dice*

$$T'(t) = k(T(t) - S(t))$$

donde k es una constante asociada a la bola. Luego,

$$T(t) = \left(T(0)e^{-kt_0} - k \int_{t_0}^t e^{-ks} S(s) ds \right) e^{kt}$$

En el caso particular en que la temperatura del medio ambiente se mantiene constante, digamos $S(t) = S$, entonces la solución es dada por

$$T(t) = S + (T(t_0) - S)e^{k(t-t_0)}$$

EJEMPLO 9.7 (Descomposición radioactiva). *Una sustancia radioactiva se descompone a una razón proporcional a la cantidad existente. Así, si $x(t)$ denota la cantidad de la sustancia radioactiva al momento t , entonces la ley anterior se describe por*

$$x'(t) = kx(t)$$

donde $k < 0$ es una constante que depende del material radioactivo. De esta manera,

$$x(t) = x(t_0)e^{k(t-t_0)}$$

EJEMPLO 9.8. *Busquemos la curva que pasa por el punto $(1, 1)$ en el plano \mathbb{R}^2 y que en cada uno de sus puntos (x, y) tiene pendiente $-y/x$. Escribamos (donde se pueda) y como función de x . Luego,*

$$y'(x) = -\frac{y}{x}$$

$$y(1) = 1$$

Esta es una ecuación diferencial lineal homogénea. Su solución es dada por

$$y(x) = \frac{1}{x}$$

9.8. Ecuaciones Homogéneas

Consideremos un problema de Cauchy del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

donde $f : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y continuamente derivable respecto a la variable x .

Si tenemos que la función f satisface la propiedad de homogeneidad siguiente

$$f(\lambda t, \lambda x) = f(t, x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

entonces al hacer el cambio de variable

$$z = \frac{x}{t}$$

entonces la ecuación $x'(t) = f(t, x(t))$ es transformada en una de variable separada

$$z'(t) = \frac{g(z(t))}{t}$$

donde $g(z) = f(z) - z$. Como ya sabemos encontrar (al menos de manera implícita) la solución de problemas de variable separada, entonces podemos obtener $x(t)$, al menos de manera implícita.

EJEMPLO 9.9. Si consideramos la ecuación

$$x'(t) = \frac{x(t)^2 - t^2}{2tx(t)}$$

entonces en este caso tenemos que

$$f(t, x) = \frac{x^2 - t^2}{2tx}$$

Es clara la igualdad

$$f(\lambda t, \lambda x) = f(t, x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

En este caso, el cambio de variable

$$z = \frac{x}{t}$$

nos da la ecuación

$$z'(t) = \left(\frac{z(t)^2 - 1}{2z(t)} \right) \frac{-1}{t}$$

En este caso, al proceder con la integración, obtenemos

$$\int_{z(t_0)}^{z(t)} \left(\frac{2z}{z^2 - 1} \right) dz = -\log \left| \frac{t}{t_0} \right|$$

es decir,

$$\frac{z(t)^2 + 1}{z(t_0)^2 + 1} = \frac{t_0}{t}$$

Como $z(t) = \frac{x(t)}{t}$, tenemos

$$x(t)^2 + t^2 = pt$$

donde

$$p = t_0 \left(\left(\frac{x(t_0)}{t_0} \right)^2 + 1 \right)$$

en otras palabras,

$$\left(t - \frac{p}{2} \right)^2 + x(t)^2 = \frac{p^2}{4}$$

lo cual nos dice que la gráfica de la solución $x(t)$ vive en un círculo centrado en $(p, 0)$ de radio $p/2$.

9.8.1. Ecuación de Bernoulli. Una ecuación diferencial de la forma

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)x^r(t)$$

donde $p, q : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas y $r \in \mathbb{R}$, es llamada una ecuación de Bernoulli.

Si tenemos $r \in \{0, 1\}$, entonces la ecuación queda lineal y sabemos resolverla.

Si tenemos $r \notin \{0, 1\}$, entonces consideramos el cambio de coordenada

$$y(t) = x(t)^{1-r}$$

nos entrega la ecuación lineal

$$y'(t) + (1-r)p(t)y(t) - (1-r)q(t) = 0$$

la cual podemos ahora resolver.

9.8.2. Ecuaciones autónomas. Consideremos un problema de Cauchy del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

donde $f : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ es continuamente derivable. En este caso, si $x(t)$ es la solución del problema de cauchy anterior, entonces podemos ver que

- (i) cuando $f(x(t)) > 0$, tenemos que $x(t)$ es creciente;
- (ii) cuando $f(x(t)) < 0$, tenemos que $x(t)$ es decreciente;

Si tenemos un cero de $f(x)$, digamos \hat{x} , entonces la condición $f(\hat{x}) = 0$ asegura que $x(t) = \hat{x}$ soluciona el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

Este tipo de soluciones constantes son llamadas puntos de equilibrio ó singularidades de la ecuación autónoma $x'(t) = f(x(t))$.

La unicidad de soluciones nos asegura que si tenemos dos soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de la ecuación autónoma $x'(t) = f(x(t))$ tal que $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ para cierto t_0 , entonces $x_1 = x_2$. En otras palabras, si dibujamos las gráficas de x_1 y x_2 , soluciones diferentes, entonces su gráficas nunca se cruzan. Usando toda esta información podemos crear las líneas de fase de la ecuación autónoma (ver figura 9.1).

EJEMPLO 9.10 (Modelo logístico de población). Sea $A, B > 0$. Consideremos la ecuación diferencial autónoma

$$x' = x(A - Bx)$$

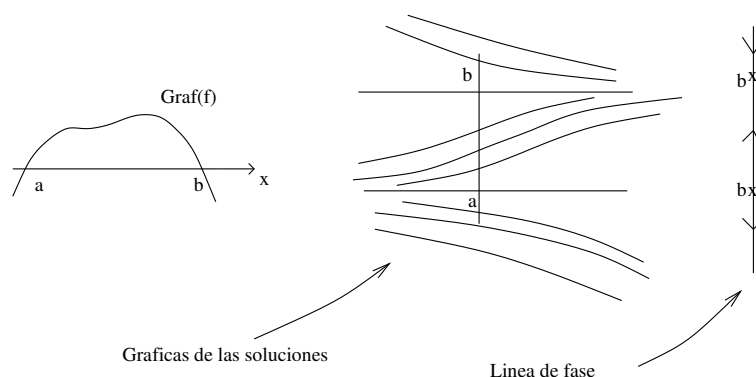


FIGURA 9.1

Este modelo corresponde a un modelo logístico de población. $x(t)$ corresponde a la cantidad de población. Tenemos dos puntos singulares, los ceros de $f(x) = x(A - Bx)$, los cuales son

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 0 \\x_2(t) &= A/B\end{aligned}$$

En este caso tenemos dos situaciones extremas; (i) si no hay población en un momento, entonces se mantiene así al futuro y (ii) una vez que la población llega una cantidad A/B , entonces esta se mantiene así al futuro.

Las líneas de fase de este sistema autónomo es similar al mostrado en la figura 9.1 con $a = 0$ y $b = A/B$.

Observemos que la ecuación anterior se puede escribir como

$$x' - Ax = -Bx^2$$

de donde vemos que esta es una ecuación de Bernoulli con $p(t) = -A$, $q(t) = -B$ y $r = 2$. Luego, si $x(t)$ es solución diferente de $x_1(t) = 0$, usando el cambio de variable

$$y(t) = \frac{1}{x(t)}$$

obtenemos la ecuación lineal

$$y'(t) + Ay(t) = B$$

cuya solución es dada por

$$y(t) = \frac{B + c_0 A e^{-At}}{A}$$

de donde obtenemos que las soluciones diferentes de la trivial son de la forma

$$x(t) = \frac{A}{B + c_0 A e^{-At}}$$

Observe que cuando $c_0 = 0$, entonces $x(t) = x_2(t)$.

TEOREMA 9.8 (Teorema de comparación). Sean $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuamente derivables tales que

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in (a, b)$$

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ soluciones de

$$x_1'(t) = f(x_1(t))$$

$$x_2'(t) = g(x_2(t))$$

respectivamente. Supongamos que

$$x_1(t_0) = x_2(t_0)$$

para algún $t_0 \in (a, b)$, entonces

$$x_1(t) \leq x_2(t), \quad \forall t$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$. Entonces,

$$x'(t) = x_1'(t) - x_2'(t) = f(x_1(t)) - g(x_2(t))$$

en particular,

$$x'(t_0) = x_1'(t_0) - x_2'(t_0) = f(x_1(t_0)) - g(x_2(t_0)) \leq 0$$

De esta manera, tenemos que $x(t)$ es decreciente. □

9.8.3. problemas.

- 1.- Buscar la familia de curvas en el plano que son ortogonales a la familia de círculos tangentes al eje y en el punto $(0, 0)$.

Ind: Observe que la familia círculos tangentes al eje y en el punto $(0, 0)$ son descritas por las ecuaciones $x^2 + y^2 = 2cx$, donde $c \in \mathbb{R}$. Si

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

describe las pendientes de una familia de curvas, entonces las pendientes de la familia ortogonal es descrita por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{f(x, y)}$$

- 2.- Resuelva el problema anterior usando coordenadas polares.
- 3.- Tenemos una población con x_0 bacterias en una solución nutriente en el momento $t = 0$. Si el alimento y el espacio son ilimitados y, como consecuencia, la población crece a un ritmo proporcional a la población presente en ese momento, describir la población en cada momento t .
- 4.- Un acuario contiene 10 litros de agua contaminada. Se proced a cambiar 5 litros de agua contaminada por 5 litros de agua limpia en cada minuto. ¿Cuánto tiempo demorará en reducir la contaminación a la mitad?
- 5.- La ley de absorción de Lambert nos dice que “el porcentaje de luz incidente que es absorbida por una lámina fina de material traslúcido es proporcional al grosor de la lámina”.
Si la luz solar que incide verticalmente sobre el mar se reduce en intensidad a la mitad a los 10 metros de profundidad, entonces determinar la profundidad a la cual esta se reduce a un 35 %.

- 6.- La segunda ley de Newton nos dice que “la aceleración a de un cuerpo de masa m y la fuerza F inducida en tal cuerpo satisfacen la relación $F = ma$ ”.

Un cuerpo de masa m cae desde una altura inicial h_0 sin presentar resistencia y con una velocidad inicial v_0 . Determinar el tiempo necesario para llegar a la distancia $h_0/2$ del suelo.

- 7.- *Curva de persecución.* Un destructor intenta dar alcance a un submarino entre la densa niebla. Lo único que sabemos es que en cierto momento sabemos que se encuentra a una distancia de 10 millas náuticas en cierta dirección y que el submarino sigue una dirección constante. Si el submarino mantiene una velocidad que es la mitad que la del destructor, determinar el camino que debe seguir el destructor para poder pasar sobre el submarino.

- 8.- Pedro y Juan piden, cada uno de ellos, una taza de café. Estas son entregadas a ellos al mismo tiempo. Supongamos que tanto la cantidad servida y las temperaturas del café son las mismas. Pedro decide poner leche fría a su café y esperar 3 minutos antes de beberlo. Por otro lado, Juan espera 3 minutos y luego le hecha la misma cantidad de leche fría y procede a beber su café. ¿Quién beberá el café más frío?

- 9.- Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

- 10.- Considere una ecuación diferencial del tipo siguiente

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$$

donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ están dados y F es una función.

- (i) Si $ae \neq bd$, entonces ver que existen constantes $h, k \in \mathbb{R}$ de manera que con el cambio de variable

$$\begin{cases} z = x + h \\ w = y + k \end{cases}$$

la ecuación es transformada en una ecuación

$$\frac{dw}{dz} = G(z, w)$$

donde $G(\lambda z, \lambda w) = G(z, w)$, es decir una ecuación homogénea.

- (ii) Si $ae = bd$, entonces encontrar un cambio de variable para transformar la ecuación a una de variable separada.

- 11.- Ver que la ecuación diferencial de primer orden

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)x(t) \log x(t)$$

puede resolverse haciendo el cambio de variable

$$z(t) = \log x(t)$$

Resolver la ecuación

$$tx'(t) = 2t^2x(t) + x(t) \log x(t)$$

- 12.- Un depósito contiene 100 litros de agua pura. Salmuera con 10 gramos de sal por litro fluye al estanque a una razón de 5 litros por minuto. La mezcla se matien homogénea por algún mecanismo mezclador. Si además la mezcla sale del depósito a una razón de 10 litros por minuto, entonces:
- (i) calcular la cantidad de sal en el depósito cuando queden en este sólo 50 litros;
 - (ii) ¿cuándo es máxima la cantidad de sal en el depósito?

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

(Capítulo escrito por Eduardo Sáez)

10.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales Cuasilineales de Primer Orden, Nociones Básicas

Una Ecuación Diferencial Parcial de Primer Orden (E.D.P.) es simplemente una expresión de la forma

$$(10.1) \quad E(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

Ejemplos:

$$(1) \quad a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad , \quad a, b \text{ son constantes}$$

$$(2) \quad x \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y) \quad , \quad f \text{ es una función continua}$$

¿Cuál es la idea de una **solución** de una E.D.P. ?

Respuesta: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas. La función f es una solución de la E.D.P. (10.1) ssi se satisface la identidad

$$E(x, y, f(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)) \equiv 0 \quad , \quad \text{en } \Omega$$

Geoméricamente la identidad anterior significa que la gráfica de f , la cual es una superficie en \mathbb{R}^3 , satisface la E.D.P.

¿Como encontrar estas superficies?.

Para una E.D.P cualesquiera esta pregunta es muy complicada. Sin embargo en algunos casos muy particulares es posible dar respuesta a la pregunta.

DEFINICIÓN 10.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio . Una E.D.P. de Primer Orden de la forma

$$(10.2) \quad P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \quad , \quad P, Q, R \in C^1(\Omega)$$

se llama E.D.P. Cuasilineal de Primer Orden.

La ecuación (10.2) se llama Cuasilineal pues en general las funciones coeficientes P, Q, R no necesariamente son transformaciones lineales en la tercera coordenada.

La ecuación (10.2) bajo un punto de vista vectorial se puede escribir equivalentemente en términos de la base canónica $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ del Espacio Vectorial \mathbb{R}^3 como el Producto Punto:

$$(P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}) \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\hat{j} - \hat{k} \right) = 0$$

Consideremos el campo de vectores $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que,

$$(10.3) \quad \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}.$$

Con el objeto de simplificar la escritura, equivalentemente el campo de vectores anterior se puede escribir simplemente $\vec{F} = (P, Q, R)$ en el entendido que el trio es un vector.

Sea Ω un dominio en \mathbb{R}^3 , S una superficie en Ω que es la gráfica de una función diferenciable de dos variables $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $z = f(x, y)$ con D un dominio en \mathbb{R}^2 . Entonces si se define $E(x, y, z) = z - f(x, y)$ se tiene que S coincide con la gráfica del conjunto

$$E^{-1}(0) = \{(x, y, z) \mid z - f(x, y) = 0\}$$

La superficie S se puede entonces considerar como la superficie de nivel **cerro** de la función E . Si S es una superficie regular que es solución de (10.2) y consideramos el gradiente $\vec{\nabla}E = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)$ se tiene de inmediato la identidad

$$\vec{F} \cdot \vec{\nabla}E \equiv 0, \text{ en } E^{-1}(0)$$

Si se interpreta geoméricamente la identidad anterior significa que la superficie solución S , también llamada **Superficie Integral**, es **tangente** al campo de vectores \vec{F} (ver Fig. 1).

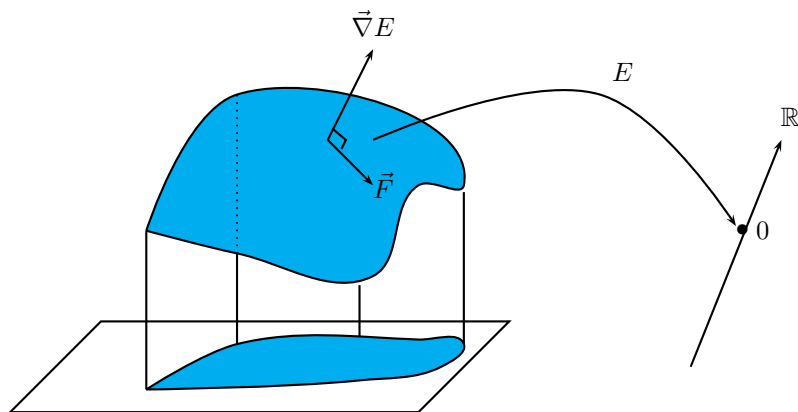


Fig. 1

¿ Como encontrar superficies **tangentes** al campo de vectores \vec{F} ?

Para responder la pregunta anterior recordemos la definición de órbita, o bien, trayectoria de un campo de vectores.

DEFINICIÓN 10.2. Sea Ω un dominio en \mathbb{R}^3 y $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de vectores. Una curva paramétrica $\vec{r} : I \rightarrow \Omega$ donde I es un subintervalo de \mathbb{R} es una órbita (trayectoria) del campo de vectores ssi se satisface la identidad

$$(10.4) \quad \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \vec{F}(\vec{r}(t)) \quad , \quad \text{en } I$$

La definición anterior dice que una curva paramétrica tal que el vector tangente a la curva coincide con el campo de vectores en cada punto, es una órbita (ver Fig. 2).

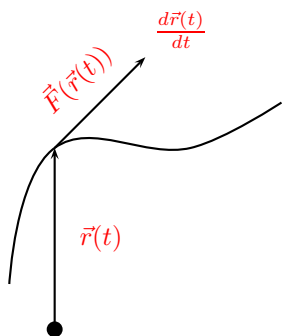


Fig. 2

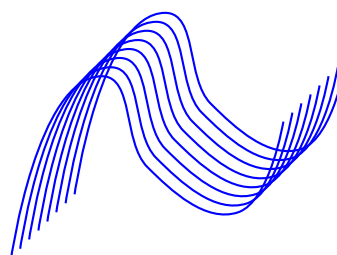


Fig. 3 Superficie de órbitas

Nótese que si se tiene una superficie (ver Fig. 3) formada sólo por órbitas del campo de vectores entonces es inmediato que es una superficie tangente al campo de vectores y en consecuencia es una solución de la E.D.P (2).

El problema para encontrar Superficies Integrales se reduce a conseguir órbitas del campo de vectores.

La identidad (10.4) se puede escribir equivalentemente en término de las componentes de los vectores de donde se tiene la igualdad

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

o bien, en término de las diferenciales se tiene el sistema:

$$(10.5) \quad \begin{cases} dx = P(x, y, z)dt \\ dy = Q(x, y, z)dt \\ dz = R(x, y, z)dt \end{cases}$$

Recordemos que una solución general de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, o bien una solución de las formas diferenciales correspondientes, contienen una constante arbitraria.

Supongamos que del sistema (10.5) se obtiene un par de ecuaciones diferenciales ordinarias esencialmente diferentes en el sentido que admiten como soluciones superficies independientes que se intersectan transversalmente según una curva. Dicha curva es una solución del sistema y en consecuencia es una órbita del campo de vectores. Luego las órbitas, o bien, trayectorias del campo de vectores son curvas en \mathbb{R}^3 determinadas por la intersección de un par de superficies de niveles c_1, c_2 (ver Fig. 4) independientes de la forma

$$(10.6) \quad \begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = c_1 \\ \varphi_2(x, y, z) = c_2 \end{cases}$$

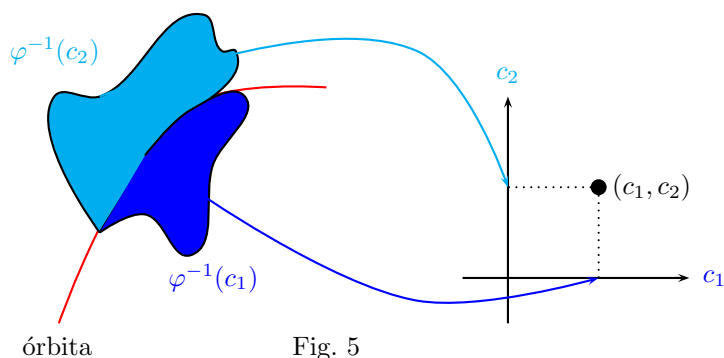


Fig. 5

Las superficies anteriores se llaman **características** de (10.2).

Importante: Nótese que si se mueve sobre una curva arbitraria el punto (c_1, c_2) en el plano c_1c_2 , la órbita en \mathbb{R}^3 adquiere una dinámica y **genera una superficie de órbitas** como en la Fig. 3., es decir, se tiene una superficie integral de (10.2).

Más exactamente, sea $\Phi(c_1, c_2) = 0$ con $\Phi \in C^1$ la ecuación de una curva en el plano c_1c_2 , entonces por las características (10.6) reemplazando las constantes en la ecuación se obtiene una ecuación en las variables x, y, z de la forma

$$\Phi(\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)) = 0$$

La expresión anterior es una ecuación de una superficie integral, llamada solución general por contener la función arbitraria Φ .

Análogamente, en el plano c_1c_2 se puede considerar una gráfica de una función arbitraria, dada por una ecuación de la forma $c_2 = \Phi(c_1)$ con $\Phi \in C^1$. Por cada punto de la gráfica de Φ se tiene, excepto casos degenerados, en \mathbb{R}^3 una órbita del campo de vectores (10.3) como intersección de las características (10.6). Entonces, ver Fig. 6, los puntos de la gráfica de Φ generan en \mathbb{R}^3 una superficie de órbitas y en consecuencia una solución general de (10.2) de ecuación

$$\varphi_2(x, y, z) = \Phi(\varphi_1(x, y, z))$$

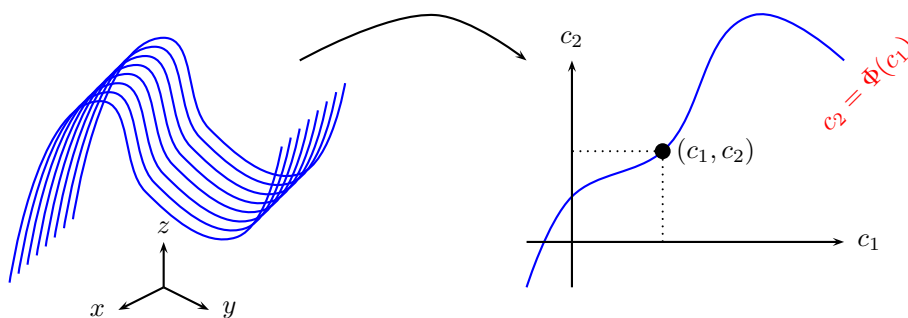


Fig. 6

Problema:

Una problema frecuente en la resolución de E.D.P. cuasilineales es preguntar, si existe, una superficie solución de la E.D, que tenga la propiedad de contener una curva predeterminada.

Respuesta:

La solución se reduce a encontrar la ecuación de la curva en el plano de las constantes $c_1 c_2$ que tiene la propiedad de generar la superficie integral solución del problema. Para conseguir dicha curva basta considerar el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las características y las ecuaciones que definen la curva dada. Este sistema define implícitamente la ecuación de la curva que genera la superficie integral solución del problema.

Observación : Es inmediato que si la curva dada en \mathbb{R}^3 es una órbita del campo de vectores (10.3) significa que la curva es la intersección respectiva de dos superficies de niveles c_1^*, c_2^* de las características. Entonces dada cualquier curva diferenciable en el plano de las constantes $c_1 c_2$ que pase por el punto (c_1^*, c_2^*) genera una superficie solución y el problema no es bien definido en el sentido que admite infinitas soluciones.

EJEMPLO 10.1. *Encontremos la superficie solución de la E.D.P*

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

que tenga la propiedad de contener la curva intersección de la superficie $z = y^2$ con el plano $x = 0$.

El sistema (10.6) se reduce

$$\begin{cases} dx = ydt \\ dy = -xdt \\ dz = 0 \end{cases}, \text{ de las dos primeras ecuaciones se tiene } xdx = -ydy$$

Integrando, se obtiene la primera característica $x^2 + y^2 = c_1$, donde $c_1 > 0$ es una constante arbitraria. La segunda característica es inmediata de la tercera ecuación pues basta integrar y se obtiene $z = c_2$, donde c_2 es una constante arbitraria. Sea una curva en el plano de las constantes $c_2 = \Phi(c_1)$ con $\Phi \in C^1$ una función arbitraria. Entonces $z = \Phi(x^2 + y^2)$ es una solución general de la E.D.P.

Para encontrar la solución que contenga la curva dada consideremos el sistema formado por las característica y las ecuaciones de la curva, en efecto:

$$\begin{array}{l} x^2 + y^2 = c_1 \\ z = c_2 \\ z = y^2 \\ x = 0 \end{array}$$

Este sistema de 4 ecuaciones y las 3 variables de \mathbb{R}^3 , define implícitamente la ecuación de la curva en el plano $c_1 c_2$ que genera la superficie integral solución del problema. Por esta razón operatoriamente eliminando las variables se obtiene la ecuación $c_2 = c_1$ con $c_1 > 0$. Geométricamente se tiene la bisectriz principal del plano $c_1 c_2$ restringida a $c_1 > 0$. Esta semirecta por las características genera el paraboloides $z = x^2 + y^2$ que es la superficie integral del problema.

Comentario Si en un problema determinado, se dispone de una primera característica y no es simple conseguir la segunda característica independiente, entonces se pueden restringir los cálculos que continúan a la característica conocida ¿Cómo hacer esto?. Simplemente asumiendo su ecuación. La curva intersección que se obtenga con la segunda característica independiente es una órbita del campo de

vectores pues se encuentra por la restricción en la gráfica de la primera característica.

EJEMPLO 10.2. Consideremos la E.D.P.

$$xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = -xy$$

El sistema (10.6) se reduce en este caso al siguiente:

$$\begin{cases} dx &= xzdt \\ dy &= yzdt \\ dz &= -xydt \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones se tiene que

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Integrando, se obtiene la primera característica $y = xc_1$, donde c_1 es una constante arbitraria. Para conseguir la segunda característica se puede multiplicar la tercera ecuación del sistema por z y se obtiene $zdz = y(-xzdt)$ de donde por la primera ecuación del sistema se tiene $zdz = -ydx$.

Restringiendo los cálculos a la primera característica $y = xc_1$ se obtiene la ecuación diferencial ordinaria $zdz = -c_1x dx$ cuya solución inmediata es $z^2 + x^2c_1 = c_2$. Como al restringirnos a la primera característica tenemos $y = xc_1$, luego se tiene que $z^2 + xy = c_2$ es claramente la segunda característica independiente, donde c_2 es una constante arbitraria.

EJEMPLO 10.3. Encontrar la solución general de la Ecuación de Onda Unidimensional donde $-\infty < x < \infty$ es una variable espacial y $t > 0$ designa el tiempo:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad c > 0 \text{ es una constante}$$

La Ecuación de Onda no es una E.D.P. de primer orden, sin embargo, se puede reducir a dos E.D.P. Cuasilineales de primer orden ¿ Como ?.

La Ecuación de Onda se puede factorizar en el siguiente sentido

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) (z) = 0 & \text{o bien, permutando los factores} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) (z) = 0 \end{cases}$$

Es inmediato que si $z = f(t, x)$ con $f \in C^2$ es una solución de uno de los factores, entonces es solución de la ecuación completa. Además por la linealidad de la Ecuación de Onda, o bien, por el Principio de Superposición de soluciones para operadores lineales, la combinación lineal de soluciones es solución.

Por la idea anterior el problema de resolución de la Ecuación de Onda se reduce a encontrar soluciones de los factores anteriores, es decir a resolver E.D.P. Cuasilineales.

Sea el factor $\frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x} = 0$. Entonces el sistema (10.6) se reduce:

$$\begin{cases} dt &= d\lambda \\ dx &= cd\lambda \\ dz &= 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones del sistema se tiene la primera característica $ct - x = c_1$ y de la tercera ecuación se obtiene la segunda característica $z = c_2$. Sea una curva en el plano de las constantes $c_2 = \varphi(c_1)$ con $\varphi \in C^2$ una función arbitraria. Entonces $z = \varphi(x - ct)$ es una solución de la Ecuación de Onda.

Análogamente considerando el factor $\frac{\partial z}{\partial t} - c \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ se obtiene las características independientes $ct + x = c_1, z = c_2$. Luego $z = \psi(x + ct)$ con $\psi \in C^2$ una función arbitraria es otra solución de la Ecuación de Onda. Por el Principio de Superposición se obtiene la solución

$$(10.7) \quad z = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

La solución anterior es general por contener dos funciones arbitrarias dado que la E.D.P es de segundo orden y lleva el nombre de solución de D'Alambert de la Ecuación de Onda.

Interpretación de la solución $z = \varphi(x - ct)$

Supongamos que la gráfica de $z = \varphi(x)$ es como en la Fig. 7, la variable t es el tiempo y la constante $c > 0$ es una velocidad. Entonces $s = ct$ es un desplazamiento y la gráfica de $z = \varphi(x - ct)$ es la gráfica de $z = \varphi(x)$ que se traslada en cada instante $s = ct$ unidades hacia la derecha.

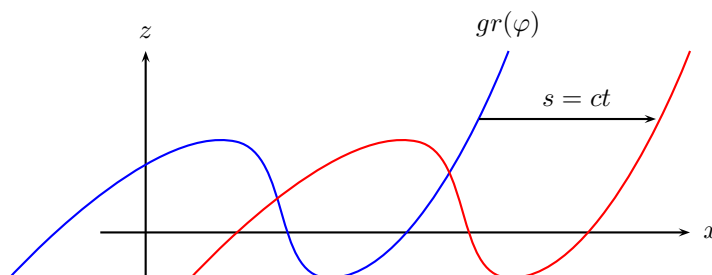


Fig. 7

Por la interpretación anterior se dice que $z = \varphi(x - ct)$ es una onda viajera de la Ecuación de Onda.

Análogamente, la gráfica en el plano xz de la solución $z = \psi(x + ct)$ es la gráfica de la onda $z = \psi(x)$ que se traslada en sentido negativo del eje x a velocidad $s = ct$. En consecuencia, la solución (10.7) es una onda que es suma de dos ondas viajeras.

Problema adicional. Supongamos que interesa encontrar soluciones de la Ecuación de Onda que satisfagan un par de condiciones iniciales llamadas de Cauchy

$$\begin{cases} z(0, x) = f(x) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(0, x) = g(x) \end{cases} \quad ; \text{ con } f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^2, g \in C^1$$

Respuesta: La solución general de la Ecuación de Onda es (10.7) y el problema se reduce a encontrar las funciones precisas φ, ψ tales que (10.7) satisfaga las condiciones de Cauchy.

Tomando $t = 0$ y reemplazando las condiciones iniciales en la solución general se tiene que φ, ψ satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} f(x) &= \varphi(x) + \psi(x) \\ g(x) &= c\varphi'(x) - c\psi'(x) \end{cases}$$

Derivando la primera ecuación del sistema anterior respecto de x se tiene que las derivadas de φ, ψ satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} \varphi'(x) + \psi'(x) &= f'(x) \\ c\varphi'(x) - c\psi'(x) &= g(x) \end{cases}$$

Despejando del sistema las derivadas de φ, ψ tenemos:

$$\begin{cases} \varphi'(x) &= \frac{cf'(x) + g(x)}{2c} \\ \psi'(x) &= \frac{cf'(x) - g(x)}{2c} \end{cases}$$

Integrando respecto de x se tiene las identidades:

$$\begin{cases} \varphi(x) &\equiv \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(\xi) d\xi \\ \psi(x) &\equiv \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(\xi) d\xi \end{cases}$$

Reemplazando las traslaciones $x \rightarrow x + ct$ y $x \rightarrow x - ct$ en la primera y segunda identidad respectivamente se obtiene:

$$\begin{cases} \varphi(x + ct) &\equiv \frac{f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(\xi) d\xi \\ \psi(x - ct) &\equiv \frac{f(x-ct)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(\xi) d\xi \end{cases}$$

Finalmente, sumando las dos identidades anteriores encontramos la solución llamada de D'Alambert del problema de la Ecuación de Onda con condiciones iniciales de Cauchy.

$$z(t, x) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi$$

10.1.1. Tareas.

- 1) Encontrar la solución general de la E.D.P.

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = (x + y)z$$

- 2) Sea la Ecuación Diferencial Parcial:

$$y^2 z \frac{\partial z}{\partial x} - x^2 z \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y$$

- i) Encontrar dos características independientes.
ii) Encontrar, si existe, la superficie integral que contiene la curva intersección de las superficies

$$x^3 + y^2 = 1, \quad z = 0$$

- 3) Encontrar la superficie integral de la E.D.P.

$$x(y^2 + z) \frac{\partial z}{\partial x} - y(x^2 + z) \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 - y^2)z$$

que contiene la recta intersección de los planos $x + y = 0, z = 1$.

4) Encontrar la superficie integral de la E.D.P

$$yz \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^3$$

que contiene la recta de ecuaciones paramétricas $x = 0, y = \lambda, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

5) Sea la ecuación de Onda con condiciones de Cauchy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = x, \quad -\infty < t < \infty$$

- (i) Resolver el problema de Cauchy.
 - (ii) En el plano (x, u) haga un bosquejo de las ondas del problema para los instantes $t = 0$ y $t = 2$, respectivamente.
 - (iii) En el plano (x, u) ¿ Para qué tiempo t la onda del problema pasa por el punto $(x, u) = (1, 1)$?.
- 6) Sea la ecuación de Onda Unidimensional

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \text{con } -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

i) ¿Cuál es la solución que satisface las condiciones iniciales de Cauchy ?

$$\left. \begin{aligned} z(0, x) &= 1 - x^2 \\ \frac{\partial z}{\partial t}(0, x) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- ii) En el plano xz haga un bosquejo de la solución para $t = 0$ y $t = 1$.
- iii) En el plano xz . ¿ Para qué tiempo $t > 0$ la solución encontrada en i) pasa por el punto $(x, z) = (0, -4)$? . Haga un bosquejo de la onda.
- iv) ¿ Existe algún instante t tal que la solución encontrada en i) pasa, en el plano xz , por el punto $(x, z) = (1, \frac{1}{2})$?.

10.2. Formas Normales de Ecuaciones Diferenciales Parciales

La idea general de la Teoría de Formas Normales consiste en encontrar un sistema de coordenadas donde una determinada expresión se reduce a una expresión equivalente que contiene sólo los términos más relevantes, por ejemplo, es conocido en el estudio de las cuadráticas reales en dos variables reales con coeficientes constantes, que existen traslaciones y rotaciones en el plano que permiten definir nuevas coordenadas donde la ecuación de la cuadrática no contiene el término mixto y no contiene al menos un término lineal ya que son irrelevantes para la forma cualitativa de la gráfica de la cuadrática. Dichas ecuaciones son llamadas Canónicas. Otro ejemplo conocido es en el estudio de las matrices cuadradas, donde se demuestra que existen bases adecuadas en los Espacios Vectoriales respectivos tales que mediante transformaciones lineales es posible representar la matriz en términos de los valores propios que son los números realmente relevantes de la matriz. Dichas matrices se dicen de Jordan.

La expresión general de una Ecuación Diferencial Parcial Lineal Real de Segundo Orden en dos variables, definida en un dominio Ω del plano en coordenadas cartesianas es de la forma

$$(10.8) \quad \boxed{a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y)u + g(x, y) = 0}$$

donde los coeficientes $a, b, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones en dos variables que admiten desarrollos de Taylor convergentes y no se anulan simultáneamente en Ω . Los coeficientes $d, e, f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones en dos variables y continuas.

Como la ecuación (10.8) es de segundo orden, veremos en lo que sigue que siempre es posible reducir los coeficientes de las derivadas de segundo orden a constantes muy simples mediante un cambio de coordenadas definidas por sistema de ecuaciones de la forma

$$(10.9) \quad \begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad \text{con} \quad \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

tal que (10.8) en las nuevas coordenadas es equivalente a una de los siguientes tipos de ecuaciones más sencillas, llamadas **Formas Normales**, o bien, formas **Formas Canónicas** de (10.8).

$$(10.10) \quad \text{Formas Normales :} \quad \begin{cases} 1.a) & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + T.O.I. = 0 \\ 1.b) & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + T.O.I. = 0 \\ 2.a) & \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + T.O.I. = 0 \\ 2.b) & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + T.O.I. = 0 \\ 3) & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + T.O.I. = 0 \end{cases}$$

donde *T.O.I.*, designa los términos de orden inferior al efectuar el cambio de coordenadas (10.9) a (10.8) para obtener (10.10).

DEFINICIÓN 10.3. Diremos que la ecuación (10.8) es de tipo **Hiperbólica, ó Parabólica, o bien, Elíptica**, si y sólo si existe un cambio de coordenadas tal que la ecuación se puede escribir en la Forma Normal **1., ó 2., o bien 3., respectivamente**.

Nótese de (10.10) que no existe unicidad de Formas Normales. Además, las formas 1.), 2.) y 3.) son por definición de tipo Hiperbólicas, Parabólicas y Elíptica, respectivamente.

En Física e Ingeniería es frecuente encontrar las E.D.P.

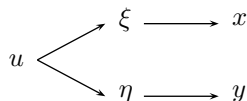
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 & \text{Ecuación de Onda} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 & \text{Ecuación de Calor} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{Ecuación de Laplace} \end{cases}$$

Estas ecuaciones son ejemplos inmediatos de Ecuaciones de tipo Hiperbólica, Parabólica y Elíptica, respectivamente.

TEOREMA 10.4. La E.D.P. (10.8) es reducible en Ω a la forma:

- 1) *Hiperbólica* si y sólo si $b(x, y)^2 - a(x, y)c(x, y) > 0$, $\forall (x, y) \in \Omega$
- 2) *Parabólica* si y sólo si $b(x, y)^2 - a(x, y)c(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in \Omega$
- 3) *Elíptica* si y sólo si $b(x, y)^2 - a(x, y)c(x, y) < 0$, $\forall (x, y) \in \Omega$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Delta(x, y) = b(x, y)^2 - a(x, y)c(x, y)$. Demostraremos en primer lugar que en Ω , el signo del discriminante $\Delta(x, y)$ es invariante bajo un cambio de coordenadas del tipo (10.9). Por (10.9) es inmediato que existe una cadena de dependencia de las variables del tipo:



Usando la Regla de la Cadena y cambiando de notación se obtiene que las derivadas parciales respecto de x e y , están dadas por las expresiones:

$$\begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \eta_x \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + T.O.I. \\ u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_y \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_y \xi_x + u_{\eta\xi} \xi_y \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + T.O.I. \\ u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \eta_y \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + T.O.I. \end{cases}$$

Reemplazando las derivadas parciales anteriores en (10.8) se obtiene que la forma general de la Ecuación Parcial en las cordenadas (ξ, η) es del tipo

$$(10.11) \quad Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + T.O.I. = 0$$

donde los coeficientes de las derivadas de segundo orden están dadas por:

$$(10.12) \quad \begin{cases} A = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \\ B = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y \\ C = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 \end{cases}$$

Con un cálculo operatorio simple se verifica la identidad:

$$B^2 - AC \equiv (b^2 - ac)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2 \equiv (b^2 - ac) \left[\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right]^2$$

La identidad anterior, demuestra que el signo de la expresión $\Delta = b^2 - ac$ es invariante bajo cambio de coordenadas pues

$$Sing(B^2 - AC) = Sing(b^2 - ac) \text{ si y sólo si } \left[\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right]^2 \neq 0$$

(\Rightarrow). Es inmediato de (10.10) que las Formas Normales : Hiperbólica, Parabólica y Elíptica implican, respectivamente: $\Delta(x, y) \equiv 1$ (resp. $\frac{1}{4}$), $\Delta(x, y) \equiv 0$ y $\Delta(x, y) \equiv -1$, de donde los signos de $\Delta(x, y)$ en Ω son positivos, cero y negativo ya que son invariantes bajo cambio de coordenadas.

(\Leftarrow) Demostraremos a continuación que dependiendo del signo de Δ , existe un cambio de coordenadas (10.9) que transforma (10.8) a una de las respectivas Formas Normales en (10.10).

Caso 1.- Supongamos que $\Delta(x, y) > 0$ en Ω y busquemos funciones $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ tales que anulen simultaneamente las expresiones de A y C en (10.12). Si tales funciones existen entonces $B \neq 0$ en (10.12) pues $B^2 - AC > 0$ y dividiendo (10.11) por $\frac{1}{2B}$ se tiene la Forma Normal 1.b) de (10.10).

La demostración se reduce a analizar la consistencia del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$(10.13) \quad \begin{cases} a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0 \\ a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = 0 \end{cases}$$

Como las ecuaciones del sistema son similares, el estudio de la primera de ellas es válido para la segunda ecuación cambiando el rol de ξ por η .

La primera ecuación del sistema, dividida por ξ_y^2 tiene la forma

$$(10.14) \quad a \left(\frac{\xi_x}{\xi_y} \right)^2 + 2b \frac{\xi_x}{\xi_y} + c = 0$$

Si $a \neq 0$ en cada punto de Ω , se tiene una ecuación de segundo grado donde el cociente $\frac{\xi_x}{\xi_y}$ juega el rol de incógnita. Sus soluciones son:

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \text{ o bien, } \frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

Sean las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(10.15) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \text{ y, } \frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

Si $\xi(x, y) = cte$ es una solución general de la segunda ecuación anterior, entonces es inmediato que $\xi_x dx + \xi_y dy = 0$ y en consecuencia $\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y}$, de donde el cociente $\frac{\xi_x}{\xi_y}$ es solución de la ecuación de segundo grado (10.14) y la función ξ satisface la primera ecuación del sistema (10.13). Análogamente si $\eta(x, y) = cte$ es solución general de la primera ecuación de (10.15), entonces la función η satisface la segunda ecuación del sistema (10.13).

Para demostrar que la transformación

$$\begin{cases} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{cases}$$

define un cambio coordenadas en Ω , basta demostrar que el jacobiano de la transformación no se anula en Ω . En efecto las funciones ξ y η , por (10.14) y (10.15) satisfacen

$$\begin{cases} -\frac{\xi_x}{\xi_y} &= \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \\ -\frac{\eta_x}{\eta_y} &= \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \end{cases}$$

Luego

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} - \frac{\eta_x}{\eta_y} = -2 \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} \neq 0, \text{ de donde, } \frac{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x}{\xi_y \eta_y} \neq 0$$

Entonces, $\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0, \forall x, y \in \Omega$

Si $a \equiv 0$, entonces $b(x, y) \neq 0$ en cada punto de Ω pues por hipótesis $\Delta(x, y) > 0$. Si $c \equiv 0$, basta dividir (10.8) por $2b$ para tener la forma normal de la ecuación diferencial. Sea entonces $c(x, y) \neq 0$ en cada punto de Ω . El sistema (10.13) se reduce a la expresión

$$\begin{cases} 2b\xi_x \xi_y + c\xi_y^2 &= 0 \\ 2b\eta_x \eta_y + c\eta_y^2 &= 0 \end{cases}$$

Dividiendo la primera ecuación del sistema por ξ_x^2 se tiene la ecuación de segundo grado con incógnita el cociente $\frac{\xi_y}{\xi_x}$;

$$2b \frac{\xi_y}{\xi_x} + c \left(\frac{\xi_y}{\xi_x} \right)^2 = 0$$

o bien factorizando ,

$$\frac{\xi_y}{\xi_x} (2b + c \frac{\xi_y}{\xi_x}) = 0$$

Sus soluciones son :

$$\frac{\xi_y}{\xi_x} = 0 \text{ , o bien , } \frac{\xi_y}{\xi_x} = -\frac{2b}{c}$$

Sean las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx}{dy} = 0 \text{ , y , } \frac{dx}{dy} = \frac{2b}{c}$$

Sean $x = cte$, y , $\eta(x, y) = cte$ las respectivas soluciones generales de las ecuaciones ordinarias, entonces

$$\begin{cases} \xi &= x \\ \eta &= \eta(x, y) \end{cases}$$

satisface el sistema (10.13). El sistema como una transformación define un cambio de coordenadas pues $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \neq 0$, ya que, $b \neq 0$. Lo anterior demuestra sólo la parte 1) del Teorema.

Caso 2.- Supongamos que $\Delta(x, y) \equiv 0$ en Ω . Análogamente a lo anterior busquemos ahora funciones $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ tales que anulen simultaneamente las expresiones de A y B en (10.12).

Si $a \equiv 0$ en (10.8) entonces $b \equiv 0$ pues $b^2 - ac \equiv 0$, luego $c \neq 0$ en cada punto de Ω . Basta dividir (10.8) por c para tener la forma Parabólica 2.b).

Si $a \neq 0$ en cada punto de Ω en (10.8), del **caso 1.-** se sabe que la función $\xi = \xi(x, y)$ obtenida de la segunda ecuación diferencial en (10.15), (que se reduce a la forma más simple $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$), tiene la propiedad de anular la expresión de A . Pero $B^2 - AC \equiv 0$ pues el $sig(\Delta(x, y))$ es invariante bajo cambios de coordenadas, entonces la misma función $\xi = \xi(x, y)$ anterior, tambien anula B . Por otro lado basta tomar $\eta(x, y) = y$ ya que en el caso $c \neq 0$ en cada punto de Ω , no anula la expresión de C (si $c \equiv 0$ el teorema es inmediato pues (10.8) dividida por a se encuentra en la forma normal Parabólica 2.b))

Para terminar la demostración de este caso falta demostrar que la transformación definida por el sistema:

$$\begin{cases} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= y \end{cases} \text{ , define un cambio de coordenadas en } \Omega.$$

Pero

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \xi_x \text{ , y } -\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{b}{a}$$

Si $b \equiv 0$ en Ω , entonces $c \equiv 0$ y la demostración es inmediata pues basta dividir (10.8) por a para tener la forma normal Parabólica 2.b).

Si $b \neq 0$ en cada punto de Ω , entonces $\xi_x \neq 0$ y el Jacobiano anterior no se anula en Ω lo que termina la demostración del caso 2.-.

Caso 3.- Supongamos que $\Delta(x, y) < 0$ en Ω . Busquemos funciones $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ tales que simultaneamente anule la expresiones de B y se tenga la identidad $A \equiv C$ en (10.12). Entonces de (10.12) y de las identidades en Ω , $A - C \equiv 0$ y $B \equiv 0$ se tiene respectivamente el sistema:

$$(10.16) \quad \begin{cases} a(\xi_x^2 - \eta_x^2) + 2b(\xi_x \xi_y - \eta_x \eta_y) + c(\xi_y^2 - \eta_y^2) &= 0 \\ a\xi_x \eta_x + b(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + c\xi_y \eta_y &= 0 \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación del sistema por $2i$ y sumando con la primera se obtiene:

$$a(\xi_x + i\eta_x)^2 + 2b(\xi_x + i\eta_x)(\xi_y + i\eta_y) + c(\xi_y + i\eta_y)^2 = 0$$

Dividiendo la ecuación por $(\xi_y + i\eta_y)^2$ se tiene:

$$a\left(\frac{\xi_x + i\eta_x}{\xi_y + i\eta_y}\right)^2 + 2b\left(\frac{\xi_x + i\eta_x}{\xi_y + i\eta_y}\right) + c = 0$$

Esta expresión significa que el cociente $\frac{\xi_x + i\eta_x}{\xi_y + i\eta_y}$ es solución de la ecuación de segundo grado $aX^2 + 2bX + c = 0$, es decir,

$$(10.17) \quad \frac{\xi_x + i\eta_x}{\xi_y + i\eta_y} = \frac{-b - i\sqrt{ac - b^2}}{a}$$

Nótese que $a \neq 0$ en cada punto de Ω pues $b^2 - ac < 0$ (el caso $a = 0$ no es posible pues $b^2 < 0$ es una contradicción.)

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + i\sqrt{ac - b^2}}{a}, \text{ y sea, } \Phi(x, y) = \xi(x, y) + i\eta(x, y) = c_1 + ic_2 \in \mathbb{C}$$

su solución general, donde $c_1 + ic_2$ es una constante compleja arbitraria.

Pero la diferencial de $\Phi(x, y) = cte$ es $d\Phi = \Phi_x dx + \Phi_y dy = 0$, entonces $\frac{dy}{dx} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y}$ y en consecuencia se tiene (10.17).

El cálculo anterior significa que las funciones

$$(10.18) \quad \begin{cases} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{cases}$$

satisfacen el sistema (10.16) y en consecuencia $A - C \equiv B \equiv 0$.

Falta demostrar que el sistema (10.18) define una transformación que es un cambio de coordenadas, o bien, que $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$ en cada punto de Ω .

Consideremos la parte imaginaria

$$Im\left(\frac{\xi_x + i\eta_x}{\xi_y + i\eta_y}\right) = \frac{\xi_y \eta_x - \xi_x \eta_y}{\xi_y^2 + \eta_y^2} = -\frac{\sqrt{ac - b^2}}{a} \neq 0, \text{ en cada punto de } \Omega$$

Entonces

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0, \text{ en cada punto de } \Omega$$

lo que concluye la demostración. \square

OBSERVACIÓN 10.1. *El teorema anterior se generaliza a E.D.P. lineales de segundo orden definidas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Por cambios de coordenadas la forma general de la E.D.P. se puede escribir en la forma normal*

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} + T.O.I. = 0, \text{ y se tiene la siguiente clasificación:}$$

- 1) *Elíptica* $\Leftrightarrow \forall i, \lambda_i > 0$ (resp. $\lambda_i < 0$)
- 2) *Parabólica* $\Leftrightarrow \exists i, \lambda_i = 0$
- 3) *Hiperbólica* $\Leftrightarrow (\exists!) i, \lambda_i > 0$ (resp. $\lambda_i < 0$), $\lambda_j < 0$ (resp. $\lambda_j > 0$) si $i \neq j$
- 4) *Ultrahiperbólica* \Leftrightarrow Existe más de un $\lambda_i > 0$ y más de un $\lambda_i < 0$

OBSERVACIÓN 10.2. Sea la función asociada a una misma E.D.P. de la forma (10.8)

$$\Delta : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que, } \Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$$

Consideremos la partición de Ω en los tres conjuntos

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \text{ donde } \Omega_1 = \Delta^{-1}(-\infty, 0), \Omega_2 = \Delta^{-1}(0) \text{ y } \Omega_3 = \Delta^{-1}(0, \infty)$$

Entonces, una misma ecuación puede ser de los tres tipos: Elíptica, Parabólica, o bien, Hiperbólica si se restringe a los conjuntos Ω_1, Ω_2 , o bien, Ω_3 respectivamente. Es decir, el tipo de ecuación depende del dominio de definición de los coeficientes de la E.D.P.

EJEMPLO 10.4. Encontremos la solución de la ecuación de Onda Unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{donde } k > 0 \text{ es una constante,}$$

tal que satisfaga las condiciones iniciales de Cauchy:

$$(10.19) \quad \left. \begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x) \end{aligned} \right\} \text{ con } f, g \in C^1$$

Si el coeficiente $k \neq 1$ en la ecuación de Onda, entonces dicha ecuación no está escrita en forma normal por la presencia de este coeficiente diferente de uno. Es inmediato que, $\Delta(x, y) = b^2 - ac = k^2 > 0$ y en consecuencia la ecuación de Onda es de tipo Hiperbólico.

Sean las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dt}{dx} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{1}{k}, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} = -\frac{1}{k}$$

Entonces las respectivas soluciones generales son:

$$x - kt = c_1, \quad x + kt = c_2, \text{ donde } c_1, c_2 \text{ son constantes arbitrarias.}$$

Luego existe el cambio de coordenadas

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x - kt \\ \eta &= x + kt \end{aligned} \right\}, \text{ donde la Ec. de Onda es de la forma Hiperbólica}$$

De (10.12) se tiene que $B = 2$ y la ecuación en las nuevas coordenadas es de la forma $2B \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + T.O.I = 0$. Es simple verificar que los términos T.O.I $\equiv 0$, dividiendo la ecuación anterior por 4 se tiene la forma hiperbólica $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. Es claro que cualquier función que depende sólo de unas de las variables es anulada por la derivada mixta (se supone de clase C^2). Entonces

$$u = \phi(\xi) + \psi(\eta), \text{ con } \phi, \psi \in C^2 \text{ funciones arbitrarias}$$

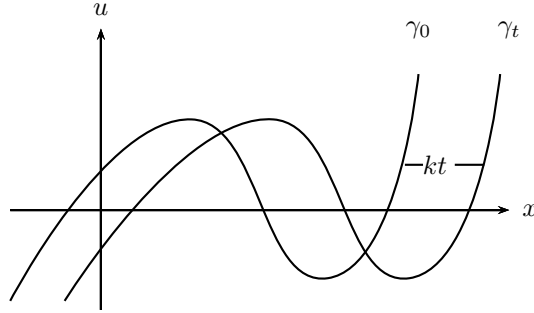
son soluciones de la forma hiperbólica. En consecuencia, regresando a las variables originales por el cambio de coordenadas,

$$(10.20) \quad u(x, t) = \phi(x - kt) + \psi(x + kt)$$

son soluciones arbitrarias de la ecuación de Onda.

Consideremos la siguiente interpretación de la solución $u = \phi(x - kt)$. Supongamos que la gráfica de ϕ en el instante inicial $t = 0$ es como la curva γ_0 de la figura. Entonces la gráfica de $u = \phi(x - kt)$ es una curva dinámica γ_t que como función del tiempo, se desplaza $s = kt$ unidades hacia la derecha a velocidad k ,

pues $kt > 0$. Análogamente la gráfica de $\psi(x + kt)$ es una curva que como función del tiempo se desplaza $s = kt$ unidades a velocidad k hacia la izquierda pues $-kt < 0$. Por estas interpretaciones, se dice que las soluciones de la ecuación de Onda, $u(x, t) = \phi(x - kt) + \psi(x + kt)$ son sumas de ondas viajeras como indica la figura:



Busquemos ahora las funciones ϕ, ψ tales que la(s) solución(es) satisfacen(en) las condiciones iniciales de Cauchy, es decir, la(s) solución(es) satisfacen las condiciones (10.19), entonces tomando $t = 0$ en (10.20) se tiene que ϕ, ψ satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} f(x) &= \phi(x) + \psi(x) \\ g(x) &= -k\phi'(x) + k\psi'(x) \end{cases}$$

Derivando la primera ecuación del sistema anterior respecto de x se tiene que las derivadas de ϕ, ψ satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} \phi'(x) + \psi'(x) &= f'(x) \\ -k\phi'(x) + k\psi'(x) &= g(x) \end{cases}$$

Despejando del sistema las derivadas de ϕ, ψ tenemos:

$$\begin{cases} \phi'(x) &= \frac{kf'(x) - g(x)}{2k} \\ \psi'(x) &= \frac{kf'(x) + g(x)}{2k} \end{cases}$$

Integrando respecto de x se tiene las identidades:

$$\begin{cases} \phi(x) &\equiv \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2k} \int_0^x g(\xi) d\xi \\ \psi(x) &\equiv \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2k} \int_0^x g(\xi) d\xi \end{cases}$$

Reemplazando $x \rightarrow x - kt$ y $x \rightarrow x + kt$ en la primera y segunda identidad respectivamente se obtiene

$$\begin{cases} \phi(x - kt) &\equiv \frac{f(x - kt)}{2} - \frac{1}{2k} \int_0^{x - kt} g(\xi) d\xi \\ \psi(x + kt) &\equiv \frac{f(x + kt)}{2} + \frac{1}{2k} \int_0^{x + kt} g(\xi) d\xi \end{cases}$$

Finalmente, sumando las dos identidades anteriores encontramos la solución llamada de D'Alambert del problema de la Ecuación de Onda con condiciones iniciales de Cauchy.

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + kt) + f(x - kt)] + \frac{1}{2k} \int_{x - kt}^{x + kt} g(\xi) d\xi$$

10.2.1. Ejercicios.

1) Clasificar y reducir a su forma normal:

$$i) \quad u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0$$

$$ii) \quad u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + 3u_x + u = 0$$

$$iii) \quad y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} - 3x^2 u_{yy} = \frac{y^2}{x} u_x - 3 \frac{x^2}{y} u_y$$

$$iv) \quad x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$$

2) Demostrar que términos de primer orden de una E.D.P., se pueden anular bajo la sustitución: $u = v e^{Ax+By}$.

3) Cuál es la solución de la E.D.P.

$$u_{xx} - u_{yy} = 3x^2 - 2y$$

$$\text{tal que satisface las condiciones: } \begin{cases} u(x, 0) = \frac{1}{4}x^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = x \end{cases}$$

4) Sea $u = u(x, t)$ y considere la E.D.P.

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x \neq 0, \quad c > 0.$$

i) Introduzca en la E.D.P. la sustitución $v(x, t) = xu(x, t)$.

ii) Escribir la E.D.P. obtenida en i) en su forma normal.

ii) Encontrar la solución de la E.D.P planteada, tal que satisface las condiciones iniciales de Cauchy: $\begin{cases} u(x, 0) = x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2c. \end{cases}$

5) Sea la ecuación de Onda Unidimensional

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \text{con } -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

i) ¿Cuál es la solución que satisface las condiciones iniciales de Cauchy?

$$\left. \begin{aligned} z(x, 0) &= 1 - x^2 \\ \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ii) En el plano xz haga un bosquejo de la solución para $t = 0$ y $t = 1$.

iii) En el plano xz . ¿Para qué tiempo $t > 0$ la solución encontrada en i) pasa por el punto $(x, z) = (0, -4)$? Haga un bosquejo de la onda.

iv) ¿Existe algún instante t tal que la solución encontrada en i) pasa, en el plano xz , por el punto $(x, z) = (1, \frac{1}{2})$.

Bibliografía

- [1] T.M. Apostol. *Cálculo*.
- [2] A. R. Castro F. *Curso básico de ecuaciones en derivadas parciales* . Addison-Wesley Iberoamericana . Wilmington, Delaware. E.U.A. 1997.
- [3] I. Peral A. *Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales* . Addison-Wesley / Universidad Autónoma de Madrid. Wilmington, Delaware. E.U.A. 1995.
- [4] E. Kreiszig. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. Editorial Limusa Wiley.
- [5] J. Marsden y A. Tromba. *Cálculo vectorial*. Editorial Addison-Wesley.
- [6] G. Thomas y R. Finney. *Cálculo con geometría analítica*. Editorial Addison-Wesley.
- [7] G.F. Simmons. *Ecuaciones diferenciales* Editorial M^C Graw Hill
- [8] S. Stein y A. Barcellos. *Cálculo con geometría analítica*. Editorial M^C Graw Hill

Índice alfabético

- ángulo entre vectores, 26
- Area de superficies, 127
- base, 19
- Base canónica, 29
- bola abierta, 27
- bola cerrada, 28

- Cambio de parámetros, 77
- Cambio de parámetros negativo, 78
- Cambio de parámetros positivo, 78
- Caras correctas de piezas de lego, 119
- centro de masa, 102, 103
- Centro de masa de cables, 109
- Circulación de fluidos, 110
- Combinación Lineal, 18
- Componentes de una parametrización, 75
- Conjunto Abierto, 28
- Conjunto Acotado, 28
- Conjunto Cerrado, 28
- Conjunto no muy complicado, 93
- Cubos n -Dimensionales, 87
- Cubos Esencialmente Disjuntos, 87
- Curva, 75
- Curvas, 10
- Curvas de Nivel, 12
- Curvatura de una parametrización, 83

- Derivada Direccional, 44
- Derivada Parcial, 45
- Derivadas parciales de orden superior, 53
- Desigualdad de Cauchy, 26
- Desigualdad Triangular, 27
- Diferencial de una función, 42
- Diferencial de una función en un punto, 41
- Dimensión, 19
- distancia Euclidiana, 27
- Dominio de una función, 9

- Ecuación de Bernoulli, 151
- Ecuaciones diferenciales de variable separada, 146
- Ecuaciones diferenciales homogéneas, 150

- Ecuaciones lineales homogéneas de primer orden, 146
- Ecuaciones lineales no-homogéneas de primer orden, 147
- Elipsoide Centrado, 12
- Espacio Dual, 21
- espacio Euclidiano, 26
- Espacio Tangente, 56
- Espacio Vectorial, 17
- Espacios isomorfos, 22

- Fórmula de Green para rectángulos, 112
- Función, 9
- Función Afín, 41
- Función diferenciable, 41
- Función Homogénea, 52
- Funciones Continuas, 37

- Generadores, 18
- Gráfica, 10

- Hiperboloide Centrado, 13

- Imágen de una transformación lineal, 21
- Imágen de una función, 9
- Integración Reiterada, 96
- Integración sobre piezas de lego, 123
- Integración sobre superficies compactas, 127
- Integral, 91
- Integral de línea, 106
- Isometría Euclidiana, 28
- Isomorfismo, 22

- Legos, 125
- Legos Orientados, 126
- Linealmente Dependiente, 19
- Linealmente Independiente, 19
- Longitud de una parametrización, 79

- Máximo global, 60
- Máximo local, 60
- Método de variación de parámetros, 148
- Mínimo global, 60
- Mínimo local, 60
- Masa de cables, 105

- Matriz de Cambio de Base, 25
 Matriz Hessiana, 63
 Matriz Jacobiana, 47
 Momento de inercia, 103
 Momento de inercia de cables, 109
 Multiplicadores de Lagrange, 68
 Núcleo de una transformación lineal, 21
 norma, 26
 Orbitas, 145
 Parámetro longitud de arco, 81
 Paraboloide Centrado de dos caras, 12
 Parametrización de curvas, 75
 Parametrización de pieza de lego, 119
 Parametrización regular, 76
 Piezas de lego, 119
 primer momento, 102
 Problema de Cauchy, 140
 Problema de Cauchy Autónomo, 140
 producto interior Euclidiano, 25
 producto cartesiano, 20
 Promedio de una función sobre una región,
 102
 Proyección, 10
 Punto Crítico, 55
 Punto crítico, 60
 Punto de Acumulación, 33
 Punto Regular, 55
 Rapidez de una parametrización, 76
 Región admisible espacial, 134
 Regiones admisibles, 113
 Regla de la Cadena, 49, 50
 Reparametrización positiva de piezas de le-
 go, 123
 Reparametrización de curvas, 78
 Reparametrización de pieza de lego, 123
 Reparametrización negativa de piezas de le-
 go, 123
 Reparametrización por longitud de arco, 81
 Sistema de Coordenadas, 98
 Subespacio generado, 18
 Subespacio Invariante, 22
 Subespacio Vectorial, 18
 Suma Inferior de Riemann, 90
 Suma Superior de Riemann, 90
 Superficies cerradas, 127
 Superficies compactas, 126
 Superficies de Nivel, 12
 Teorema de Fubini, 96
 Teorema de la divergencia, 136
 Teorema de Stokes, 131
 Torsión, 85
 Transformación lineal, 20
 transformación ortogonal, 29
 Translaciones, 28
 Trazo, 39
 Unión esencialmente disjunta, 112
 Valor crítico, 56
 Valor Propio, 22
 Valor regular, 56
 vector aceleración, 76
 Vector binormal, 83
 Vector Canónico, 29
 Vector Gradiente, 47
 Vector Propio, 22
 Vector tangente unitario, 82
 Vector unitario normal, 82
 vector velocidad, 76
 Vectores ortogonales, 27
 Volumen de un Cubo, 87