

DESSINS D'ENFANTS
Y
CURVAS DE BELYI



Rubén A. Hidalgo

Temuco — Chile

Rubén A. Hidalgo

**DESSINS D'ENFANTS
Y
CURVAS DE BELYI**

Rubén A. Hidalgo

Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera,
Temuco, Chile.

E-mail : `ruben.hidalgo@ufrontera.cl`

Url : `http://dme.ufro.cl/rhidalgo/`

Clasificación matemática por tema (2000). — 14H30, 14H10, 30F10.

Palabras claves. — Dessins d'enfants, curvas de Belyi, superficies de Riemann, grupo absoluto de Galois, curvas reales, superficies de Riemann simétricas.

Esta monografía fué obtenida gracias a los proyectos FONDECYT 1150003 y Anillo ACT1415 PIA-CONICYT.

**DESSINS D'ENFANTS
Y
CURVAS DE BELYI**

Rubén A. Hidalgo

A Betty, Cata y Puckn

INTRODUCCIÓN

Esta monografía tiene como objetivo principal presentar ciertas relaciones entre objetos combinatorios, llamados *dessins d'enfants*, con aspectos analíticos (superficies de Riemann), geometría hiperbólica, curvas algebraicas, teoría de números y teoría de Galois.

B. Riemann observó que toda superficie de Riemann compacta S se puede ver como una curva algebraica compleja irreducible y suave (aunque podemos aceptar cierto tipo de singularidades; por ejemplo nodos). De esta manera, nos podemos preguntar cuando es posible escoger tal curva definida sobre el cuerpo de los números algebraicos $\overline{\mathbb{Q}}$; tales tipos de curvas son llamadas curvas de Belyi.

En 1979, aproximadamente, Belyi [1] mostró que una superficie de Riemann compacta S se puede representar por una curva de Belyi si y sólo si existe una función meromorfa $\beta : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ con a lo más tres valores de ramificación, los cuales podemos asumir estar contenidos en $\{\infty, 0, 1\}$; estas funciones son llamadas funciones de Belyi.

Ahora, dada una función de Belyi $\beta : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, podemos considerar la preimágen por β del intervalo $[0, 1]$. Si pintamos de color negro las preimágenes de 0 y de color blanco las preimágenes de 1, entonces obtenemos un grafo bipartito en S . De hecho, se tiene que cada una de las componentes conexas del complemento de $\beta^{-1}([0, 1])$ es homeomorfo a un disco (es decir, obtenemos un mapa bipartito en S). Grothendieck llamó a tales mapas bipartitos *dessins d'enfants* (*Esquisse d'un Programme* [14]).

De manera recíproca, cada *dessin d'enfant* define una estructura de superficie de Riemann S , única módulo isomorfía, y una función de Belyi $\beta : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tal que el *dessin d'enfant* original se obtiene como preimágen por β del intervalo $[0, 1]$ (salvo homotopía).

Dessins d'enfants (sin este nombre) ya aparecían en trabajos de F. Klein en el siglo 19 para construir superficies de Riemann admitiendo ciertos cubrimientos ramificados sobre la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$.

La existencia de una función de Belyi $\beta : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de grado d es equivalente a la existencia de un subgrupo de índice d de un grupo Fuchsiano triangular (de hecho del grupo $\Gamma(2)$).

Todo lo anterior permite ver una relación natural entre objetos combinatorios simples (dessins d'enfants), objetos analíticos (funciones de Belyi) y objetos geométricos (grupos Fuchsianos).

Uno de los grupos más interesante en varias áreas de la matemática es el grupo absoluto de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Este grupo es un grupo profinito ya que es el límite inverso de los grupos de Galois finitos $\text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$, es decir, este grupo codifica la teoría clásica de Galois (además, la teoría de representaciones de este grupo juega un rol importante en la demostración del Teorema de Fermat dada por Wiles). Desafortunadamente, su estructura es aún un misterio. Como es lo usual, uno busca acciones fieles de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sobre objetos que tienen alguna estructura simple para poder encontrar información sobre su estructura de grupo.

Existe una acción natural de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sobre curvas de Belyi (al ser estas definibles sobre cuerpos de números); luego, una acción de este grupo sobre los dessins d'enfants (objetos combinatoriales). Grothendieck notó [14] que esta acción es fiel a nivel de dessins d'enfants de género 1; luego Schneps [28] verificó que la acción es fiel a nivel de dessins d'enfants de género 0. González-Diez y Gironde [12, 13] se dieron cuenta que la acción también es fiel a nivel de curvas hiperelípticas de cualquier género. Usando ciertas curvas no-hiperelípticas, llamadas curvas de Fermat generalizadas, se puede verificar que la acción es también fiel sobre ellas [17].

Para entender la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en los dessins d'enfants es necesario buscar invariantes que permitan decidir cuando dos dessins d'enfants están en la misma órbita por tal acción (y aún más, decidir si estos son isomorfos o no). Algunos invariantes son conocidos, tales como el género, los grados en los vértices de cada color, los grupos de automorfismos. Por desgracia, estos no son suficientes como para detectar si dos dessins d'enfants son o no equivalentes.

El objetivo principal de esta monografía es dar una introducción a la teoría de los dessins d'enfants, intentar explicar la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sobre estos objetos e intentar explicar el rol unificador entre superficies de Riemann, teoría de Galois, teoría de números algebraicos y geometría hiperbólica plana. Como caso particular, veremos un link con el caso de curvas reales y dessins d'enfants reales.

Una lista de referencias son dadas, la cual es por lejos de ser exhaustiva, pero que puede ayudar al principiante en el entendimiento de este tema.

Finalmente, quiero agradecer a Mariela Carvacho, Pilar Johnson, Saúl Quispe, Sebastián Reyes-Carocca y María Elisa Valdés por las sugerencias y reparos en versiones preliminares de estas notas.

Rubén A. Hidalgo
Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de La Frontera
2016
Temuco – Chile

TABLA DE MATERIAS

Introducción	ix
1. El Lema de Schwarz y Automorfismos	1
1.1. El Lema de Schwarz.....	1
1.2. Automorfismos del disco unitario y semiplano superior.....	2
1.3. Automorfismos del plano complejo.....	3
2. Superficies de Riemann y curvas algebraicas complejas	7
2.1. Superficies topológicas.....	7
2.2. Superficies de Riemann.....	9
2.3. Superficies de Riemann son superficies orientables.....	9
2.4. Primeros ejemplos de superficies de Riemann.....	9
2.5. Curvas algebraicas complejas.....	10
2.6. Funciones holomorfas/anti-holomorfas.....	13
2.7. Superficies de Riemann son curvas algebraicas.....	15
2.8. Fórmula de Riemann-Hurwitz.....	19
2.9. Automorfismos de superficies de Riemann.....	21
3. El Teorema del Descenso de Weil	25
3.1. Cuerpos de definición de superficies de Riemann.....	25
3.2. Cuerpos de móduli de superficies de Riemann.....	25
3.3. El teorema del descenso de Weil.....	27
4. Superficies de Riemann Reales	31
4.1. Superficies de Riemann reales.....	31
4.2. Condición necesaria y suficiente para ser superficie de Riemann real.....	31
4.3. Ejemplos.....	33
5. Curvas de Belyi	35
5.1. Curvas de Belyi, funciones de Belyi y pares de Belyi.....	35
5.2. Teorema de Belyi.....	38
5.3. Equivalencia de pares de Belyi.....	38

5.4. Automorfismos de pares de Belyi.....	39
5.5. Par de Belyi regular.....	39
5.6. Pares de Belyi reales.....	39
5.7. Acción del grupo absoluto de Galois sobre pares de Belyi.....	40
6. Uniformización.....	43
6.1. Grupos Kleinianos.....	43
6.2. Lema de Selberg.....	45
6.3. Teoremas de uniformización.....	45
6.4. Grupos Fuchsianos.....	46
6.5. Grupos triangulares.....	47
6.6. Grupos triangulares y curvas de Belyi.....	49
7. Dessins d'enfants.....	53
7.1. Dessins d'enfants.....	53
7.2. La signatura de un dessin d'enfant.....	53
7.3. Dessin d'enfant limpio.....	54
7.4. Valencia de un dessin d'enfant.....	55
7.5. Cubrimientos ramificados asociados a un dessin d'enfant.....	55
7.6. Equivalencia de dessins d'enfants.....	56
7.7. Automorfismos de dessins d'enfants.....	56
7.8. Dessins d'enfants y pares de Belyi.....	58
7.9. Acción del grupo absoluto de Galois en dessins d'enfants.....	60
7.10. El grupo de monodromía de un dessin d'enfant.....	61
7.11. El grupo de automorfismos de un dessin d'enfant por medio de permutaciones.....	69
7.12. Uniformización de dessins d'enfants.....	71
7.13. Dessins d'enfants reales.....	72
7.14. Ejemplos de dessins d'enfants de género cero.....	73
7.15. Funciones de Belyi de género cero y dinámica racional.....	78
Referencias.....	83
Indice.....	87

CAPÍTULO 1

EL LEMA DE SCHWARZ Y AUTOMORFISMOS

1.1. El Lema de Schwarz

Uno de los resultados más usados en la teoría de una variable compleja (por ejemplo, grupos Kleinianos, superficies de Riemann y dinámica compleja) es el Lema de Schwarz, el cual nos dice que toda función analítica del disco unitario en si mismo decrece distancias. Consideremos el disco unitario

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Lema 1.1.1 (Lema de Schwarz). — Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una función analítica tal que $f(0) = 0$. Entonces

1. $|f(z)| \leq |z|$; para cada $z \in \mathbb{D}$;
2. $|f'(0)| \leq 1$.

Más aún si tenemos igualdad en (1) para cierto $z \neq 0$ o bien en (2), entonces $f(z) = e^{i\theta}z$ para cierto $\theta \in \mathbb{R}$.

Demonstración. — Supongamos que f no es una función constante ya que en ese caso $f(z) = 0$ y el resultado es trivial. Consideremos la función siguiente :

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Notemos que g es una función analítica en $\mathbb{D} - \{0\}$ y continua en $z = 0$; luego analítica en todo \mathbb{D} .

Sea $z \in \mathbb{D}$ y $r \in (|z|, 1)$. Si w pertenece al círculo $C_r = \{w \in \mathbb{C} : |w| = r\}$, entonces tenemos que $|g(w)| \leq 1/r$. Luego, el Teorema del Módulo Máximo nos asegura que $g(z) \leq 1/r$. Haciendo tender r a 1 obtenemos

que $|g(z)| \leq 1$, de donde obtenemos (1) y (2). El mismo Teorema del Módulo Máximo nos dice que si existe un valor de $z_0 \in \mathbb{D}$ donde $|g(z_0)| = 1$, entonces existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $g(z) = e^{i\theta}$. \square

1.2. Automorfismos del disco unitario y semiplano superior

Una aplicación del lema de Schwarz es el cálculo de los automorfismos analíticos (o automorfismos holomorfos) del disco unitario.

Teorema 1.2.1 (Automorfismos de \mathbb{D}). — *Los automorfismos analíticos del disco unitario \mathbb{D} son de la forma*

$$A(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

y los automorfismos antianalíticos de \mathbb{D} son de la forma

$$A(z) = e^{i\theta} \frac{\bar{z} - \alpha}{1 - \alpha z}$$

donde $\alpha \in \mathbb{D}$ y $\theta \in \mathbb{R}$.

Demonstración. — Sea A un automorfismo analítico de \mathbb{D} y $\alpha = A^{-1}(0)$. Como

$$T(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

resulta ser un automorfismo analítico de \mathbb{D} , se tiene que $B = T \circ A^{-1}$ sigue siendo un automorfismo analítico de \mathbb{D} tal que $B(0) = 0$. El Lema de Schwarz nos asegura que $|B(z)| \leq |z|$ para cada $z \in \mathbb{D}$. Pero también podemos usar el lema de Schwarz en B^{-1} , con lo cual obtenemos que $|B^{-1}(z)| \leq |z|$ para cada $z \in \mathbb{D}$. De esta manera, $|B(z)| = |z|$ para cada $z \in \mathbb{D}$ y, por el mismo Lema de Schwarz, obtenemos que $B(z) = e^{-i\theta}$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$.

Ahora, sea A un automorfismo antianalítico de \mathbb{D} . Como $J(z) = \bar{z}$ es un automorfismo antianalítico de \mathbb{D} , obtenemos que $A \circ J$ es un automorfismo analítico de \mathbb{D} . \square

Se puede observar que el conjunto de los automorfismos analíticos y antianalíticos del disco unitario con la operación de composición de funciones resulta ser un grupo, denotado por el símbolo $\text{Aut}(\mathbb{D})$; al subgrupo (de índice dos) de automorfismos analíticos lo denotaremos por $\text{Aut}^+(\mathbb{D})$.

Como la transformación de Möbius

$$H(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

es un biholomorfismo entre el semiplano superior

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

y el disco unitario, se tiene que

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) = H \circ \text{Aut}(\mathbb{D}) \circ H^{-1}$$

$$\text{Aut}^+(\mathbb{H}) = H \circ \text{Aut}^+(\mathbb{D}) \circ H^{-1}$$

de donde se obtiene el siguiente.

Teorema 1.2.2 (Automorfismos de \mathbb{H}). — *Los automorfismos analíticos del semiplano superior \mathbb{H} son de de la forma*

$$A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

y los automorfismos antianalíticos del semiplano superior \mathbb{H} son de de la forma

$$A(z) = \frac{-a\bar{z} + b}{-c\bar{z} + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$.

El resultado anterior nos dice, en particular, que los grupos $\text{Aut}^+(\mathbb{H})$ y $\text{Aut}^+(\mathbb{D})$ son ambos isomorfos con el grupo lineal $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 1. — Completar la demostración del Teorema anterior.

1.3. Automorfismos del plano complejo

La determinación de los automorfismos del plano complejo \mathbb{C} también es fácil de obtener.

Teorema 1.3.1 (Automorfismos de \mathbb{C}). — *Los automorfismos analíticos del plano complejo \mathbb{C} son de de la forma*

$$A(z) = az + b$$

y los automorfismos antianalíticos son de la forma

$$A(z) = a\bar{z} + b$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$.

Demonstración. — Consideremos un automorfismo analítico A de \mathbb{C} . Sea $\alpha = A(0)$ y $\beta = A'(0)$. Como $T(z) = z - \alpha$ y $Q(z) = z/\beta$ son automorfismos analíticos de \mathbb{C} , tenemos que $F = Q \circ T \circ A$ es también un automorfismo analítico de \mathbb{C} . Notemos que $F(0) = 0$ y que $F'(0) = 1$. Como F es una función entera, tenemos su desarrollo en serie de potencias centrada en 0 (que converge localmente uniforme en \mathbb{C})

$$F(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

Notemos que necesariamente

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \infty.$$

En efecto, si esto no fuese así, entonces existiría una sucesión (z_n) , convergiendo a ∞ , de manera que $F(z_n)$ se mantiene acotada; luego podemos asumir que (pasando a una subsucesión si es necesario) esta converge a un valor $w \in \mathbb{C}$. Ya que F es un automorfismo, existe $p \in \mathbb{C}$ tal que $F(p) = w$. Como F es una función abierta y continua, existe un disco D_p centrado en p y radio positivo de manera que su imagen por F es un abierto que contiene a w y está contenido en el disco centrado en w y radio 1. Tomando n suficientemente grande, podemos suponer que $F(z_n) \in F(D_p)$ y que $z_n \notin D_p$, contradiciendo la inyectividad de F .

Ahora consideremos la función analítica inyectiva $G : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$G(z) = F\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} + \dots$$

Como $G(z)$ se aproxima a ∞ cuando z se aproxima a 0, tenemos que 0 es un polo de $G(z)$. En particular, debe existir algún $d \geq 2$ tal que $a_j = 0$ para $j \geq d$. En otras palabras, F debe ser un polinomio. Pero la inyectividad de F asegura que tal polinomio debe ser de grado uno, es decir, $F(z) = z$.

Para obtener los automorfismos antianalíticos, basta observar que $J(z) = \bar{z}$ es uno de ellos. □

Observación 1.3.2. — El Teorema de la aplicación de Riemann nos dice que toda región $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplemente conexa, diferente de \mathbb{C} , es biholomorfa al semiplano superior \mathbb{H} . Luego, $\text{Aut}^+(\Omega)$ es isomorfo a $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Por desgracia, sólo para algunas regiones Ω se puede calcular una aplicación de Riemann de manera explícita. Para el caso de regiones poligonales, existen las fórmulas de Schwarz-Christoffel. Por ejemplo, si Ω es un triángulo donde dos de sus ángulos interiores son $\alpha\pi$ y $\beta\pi$, entonces (modulo alguna constante) una función de Riemann es dada por

$$F : \mathbb{H} \rightarrow \Omega : z \mapsto \int_i^z \frac{dw}{(w-1)^{1-\alpha}(w+1)^{1-\beta}}.$$

En el caso que Ω es un cuadrado, la función de Riemann se puede obtener usando integrales elípticas. Cuando Ω es una región triangular cuyos lados son arcos de círculos, entonces existen también fórmulas usando las llamadas funciones triangulares de Schwarz (asociadas a ciertas ecuaciones diferenciales de segundo orden llamadas hipergeométricas).

CAPÍTULO 2

SUPERFICIES DE RIEMANN Y CURVAS ALGEBRAICAS COMPLEJAS

2.1. Superficies topológicas

Sea X un espacio topológico y $n \geq 1$ un entero. Un *atlas topológico n -dimensional* para X es una colección de pares $\mathcal{A} = \{(U_j, z_j)\}$ (llamadas *cartas*), satisfaciendo las siguientes propiedades :

1. cada $U_j \subset X$ es un abierto del espacio topológico X ;
2. $\bigcup_j U_j = X$;
3. $z_j : U_j \rightarrow z_j(U_j)$ es un homeomorfismo entre U_j y un conjunto abierto $z_j(U_j) \subset \mathbb{R}^n$.

Observación 2.1.1. — Observemos, de la definición dada arriba, que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces la *función de transición*

$$z_j \circ z_i^{-1} : z_i(U_i \cap U_j) \rightarrow z_j(U_i \cap U_j)$$

es un homeomorfismo (ver figura 2.1).

Una *variedad topológica n -dimensional* es un par formado de un espacio topológico, conexo, Hausdorff y segundo numerable, provisto de un atlas topológico n -dimensional maximal. Cuando $n = 2$, hablamos de *superficies topológicas* (en este caso podemos además identificar el plano \mathbb{R}^2 con el plano complejo \mathbb{C}).

Observación 2.1.2 (Atlas topológicos maximales). — Supongamos que tenemos dos atlas topológicos n -dimensionales para X , digamos \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 . Entonces la unión $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ también es una atlas topológico n -dimensional para X . De esta manera, gracias al Lema de Zorn, siempre existe un atlas topológico n -dimensional maximal para X .

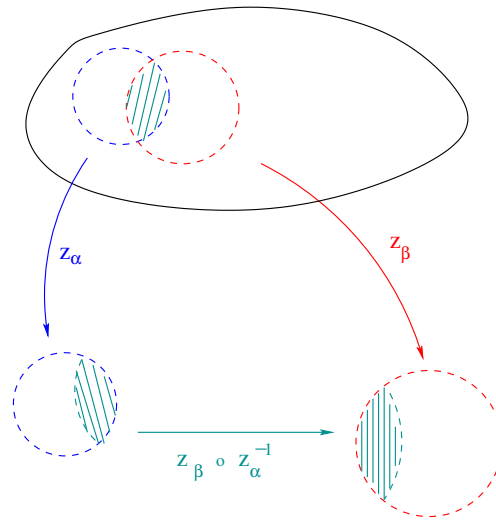


FIGURA 2.1. Función de transición

Ejemplo 1. — Consideremos un polígono regular $P \subset \mathbb{R}^2$ de $2r \geq 4$ lados, digamos s_1, \dots, s_{2r} . Consideremos dos subconjuntos disjuntos de $\{1, \dots, 2r\}$ cada uno de cardinalidad r , digamos $\{j_1, \dots, j_r\}$ y $\{k_1, \dots, k_r\}$. Por cada $l \in \{1, \dots, r\}$ consideremos una isometría Euclídeana T_l tal que $T_j(s_{j_l}) = s_{k_l}$ y $T_j(P^0) \cap P^0 = \emptyset$, donde P^0 es el interior de P . Identifiquemos los lados de P usando las transformaciones T_j . El espacio obtenido resulta ser una superficie topológica.

Una *variedad diferenciable n -dimensional* es una variedad topológica n -dimensional cuyo atlas topológico tiene sus funciones de transición diferenciables. Observemos que en este caso puede ocurrir que la unión de dos atlas diferenciables no sea diferenciable. Por ejemplo, podemos considerar $X = \mathbb{R}$ y los atlas diferenciables $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x)\}$, $\mathcal{A}_2 = \{(\mathbb{R}, w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3)\}$. En este caso, la unión $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ si bien es un atlas topológico para \mathbb{R} no es diferenciable.

Ejemplo 2. — Verificar lo dicho anteriormente.

Ejemplo 3 (Atlas diferenciable maximal). — Sea \mathcal{A} un atlas diferenciable n -dimensional para X . Sea \mathcal{F} formado de todos los pares (U, z) , donde $U \subset X$ es un abierto y z es un homeomorfismo entre U y un abierto V de \mathbb{R}^n , satisfaciendo que para todo $(W, w) \in \mathcal{A}$ con $W \cap U \neq \emptyset$ se

tiene que $w \circ z^{-1}$ y $z \circ w^{-1}$ son diferenciables. Verificar que \mathcal{F} es un atlas diferenciable maximal para X conteniendo al atlas \mathcal{A} .

2.2. Superficies de Riemann

Una *superficie de Riemann* es una superficie topológica cuyo atlas topológico 2-dimensional además satisface que (identificando \mathbb{R}^2 con \mathbb{C}) sus funciones de transición son funciones analíticas (luego funciones biholomorfas); tal atlas es llamado un *atlas analítico*.

Ejercicio 2 (Estructura de superficie de Riemann)

Considere un atlas analítico \mathcal{A} para una superficie de Riemann S . Sea \mathcal{F} la colección de todos los atlas analíticos para S que contienen al atlas \mathcal{A} . En tal colección considere el orden dado por contención. Verificar que tal orden es dirigido y utilice el Lema de Zorn para verificar la existencia de un único atlas analítico maximal que contiene a \mathcal{A} . Tal atlas maximal para S es generalmente llamado la *estructura de superficie de Riemann* de S .

2.3. Superficies de Riemann son superficies orientables

Observemos que toda superficie de Riemann es necesariamente orientable; como consecuencia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Una superficie de Riemann compacta es en particular una superficie compacta orientable; luego, ésta es determinada por su característica de Euler $\chi = 2 - 2g$, donde g es el género de la superficie.

1. Si $g = 0$, entonces la superficie es homeomorfa a la esfera unitaria $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;
2. Si $g = 1$, entonces ésta es homeomorfa al toro $S^1 \times S^1$;
3. Si $g \geq 2$, entonces es homeomorfa a la suma conexas de g toros.

2.4. Primeros ejemplos de superficies de Riemann

Ejemplo 4. — Ejemplos de superficies de Riemann son, por ejemplo, los abiertos conexos no vacíos de \mathbb{C} . Casos interesantes son el plano complejo

\mathbb{C} , el disco unitario \mathbb{D} y el semiplano superior \mathbb{H} . Estos son ejemplos de superficies de Riemann no compactas.

Ejemplo 5 (La esfera de Riemann). — Consideremos la compactificación del plano \mathbb{C} por un punto, $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, cuya topología es la generada por los abiertos usuales de \mathbb{C} y los conjuntos de la forma $(\mathbb{C} - K) \cup \{\infty\}$, donde $K \subset \mathbb{C}$ es compacto (éstos forman una base de vecindades del punto ∞). El atlas

$$\{(U_1 = \mathbb{C}, z_1(z) = z), (U_2 = \widehat{\mathbb{C}} - \{\infty\}, z_2(z) = 1/z)\},$$

tiene como función de transición a la identidad (usando las mismas cartas) o bien la transformación de la forma (usando cartas diferentes)

$$z \in \mathbb{C} - \{0\} \mapsto 1/z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

las cuales son analíticas. La superficie de Riemann así obtenida es llamada la *esfera de Riemann*. Verificar que $\widehat{\mathbb{C}}$ es homeomorfa a la esfera unitaria de \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 6. — Sea $\tau \in \mathbb{H}$ y consideremos el grupo

$$G_\tau = \langle A(z) = z + 1, B_\tau(z) = z + \tau \rangle \cong \mathbb{Z}^2.$$

Consideremos la acción de G_τ sobre el plano \mathbb{C} . Entonces, el cociente $T_\tau = \mathbb{C}/G_\tau$ define una superficie de Riemann homeomorfa al toro $S^1 \times S^1$.

2.5. Curvas algebraicas complejas

2.5.1. Curvas algebraicas afines suaves. — Consideremos una colección de polinomios

$$P_1, \dots, P_{n-1} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$$

y la función holomorfa

$$T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$$

$$T(x_1, \dots, x_n) = (P_1(x_1, \dots, x_n), \dots, P_{n-1}(x_1, \dots, x_n)).$$

Si el punto $b = (b_1, \dots, b_{n-1}) \in T(\mathbb{C}^n)$ es un valor regular de T , entonces, por el Teorema de la Función Implícita, tenemos que $C := T^{-1}(b)$ es una superficie de Riemann (no compacta). Decimos que C es una *curva algebraica suave*.

Ejemplo 7 (Curvas hiperelípticas). — En este ejemplo, tomaremos $n = 2$ y el polinomio

$$P(x, y) = y^2 - \prod_{j=1}^m (x - a_j),$$

donde $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ son puntos diferentes. En este caso, $b = 0$ es un valor regular de $T = P$, y se tiene que

$$C_2 := \left\{ (x, y) : y^2 = \prod_{j=1}^m (x - a_j) \right\} \subset \mathbb{C}^2$$

es una superficie de Riemann (no compacta). Si $m \geq 5$, entonces esta curva es conocida como un modelo afín de una *superficie de Riemann hiperelíptica* de género (i) $g = (m - 2)/2$, si m es par y (ii) $g = (m - 1)/2$, si m es impar.

Ejemplo 8 (Curvas p -gonales). — De nuevo en este ejemplo, usaremos $n = 2$. Sea p un número entero primo y consideremos el polinomio

$$P(x, y) = y^p - \prod_{j=1}^m (x - a_j)^{n_j},$$

donde $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ son diferentes y $n_1, \dots, n_m \in \{1, \dots, p - 1\}$. Al igual que en el ejemplo anterior (cuando $p = 2$), se tiene que la curva

$$C_p := \left\{ (x, y) : y^p = \prod_{j=1}^m (x - a_j)^{n_j} \right\} \subset \mathbb{C}^2$$

es una superficie de Riemann (no compacta), llamada una *curva p -gonal*.

Ejemplo 9 (Curvas de Fermat). — Sea $k \geq 1$ un entero y consideremos el polinomio

$$P(x, y) = x^k + y^k + 1.$$

En este caso, la curva

$$F_k := \{(x, y) : x^k + y^k + 1 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$$

es una superficie de Riemann (no compacta), llamada una *curva de Fermat de grado k* .

Ejemplo 10 (Curvas generalizadas de Fermat). — Sean $k \geq 1$ y $m \geq 3$ enteros y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2} \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ tales que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. En este caso, consideramos los polinomios

$$P_1(x_2, \dots, x_{m+1}) = 1 + x_2^k + x_3^k$$

$$P_j(x_2, \dots, x_{m+1}) = \lambda_{j-1} + x_2^k + x_{j+2}^k, \quad j = 2, \dots, m-1.$$

Se puede ver que 0 es valor regular de $T = (P_1, \dots, P_{m-1})$; luego

$$C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}}^{(k)} := \left\{ \begin{array}{l} 1 + x_2^k + x_3^k = 0 \\ \lambda_1 + x_2^k + x_4^k = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{m-2} + x_2^k + x_{m+1}^k = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{C}^m$$

es una superficie de Riemann (no compacta), llamada una *curva generalizada de Fermat de tipo (k, m)* .

2.5.2. Curvas algebraicas proyectivas suaves. — En los ejemplos de curvas anteriores hemos logrado obtener superficies de Riemann no compactas. Ahora veremos como construir superficies de Riemann compactas.

Consideremos una colección de polinomios homogéneos

$$P_1, \dots, P_{n-1} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$$

y consideremos la función holomorfa

$$T : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$$

$$T(x_1, \dots, x_{n+1}) = (P_1(x_1, \dots, x_{n+1}), \dots, P_{n-1}(x_1, \dots, x_{n+1})).$$

Notemos que en este ejemplo se tiene que $T(0, \dots, 0) = 0$ y que $T(\mu x_1, \dots, \mu x_{n+1}) = T(x_1, \dots, x_{n+1})$, para todo $\mu \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Ahora, si todo punto de $T^{-1}(0) - \{0\} \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ es un punto regular de T , entonces $S := T^{-1}(0) - \{0\} \subset \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ es una variedad compleja de dimensión compleja 2 (otra vez consecuencia del Teorema de la Función Implícita). Sea C la proyección de S en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$. Entonces, C resulta ser una superficie de Riemann compacta.

Ejemplo 11 (Curvas de Fermat). — La curva proyectiva

$$F_k := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : x^k + y^k + z^k = 0\} \subset \mathbb{P}^2$$

es una superficie de Riemann compacta, llamada *curva de Fermat de grado* k . Esta curva es una compactificación de la curva de Fermat afín vista anteriormente.

Ejemplo 12 (Curvas generalizadas de Fermat). — Sean $k \geq 1$ y $m \geq 3$ enteros y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2} \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ tales que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. La curva proyectiva

$$C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}}^{(k)} := \left\{ \begin{array}{l} x_1^k + x_2^k + x_3^k = 0 \\ \lambda_1 x_1^k + x_2^k + x_4^k = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{m-2} x_1^k + x_2^k + x_{m+1}^k = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}^m$$

es una superficie de Riemann compacta, llamada *curva generalizada de Fermat de tipo* (k, m) . Esta curva es una compactificación de la curva generalizada de Fermat antes vista.

2.6. Funciones holomorfas/anti-holomorfas

Sean $S_1 = (X_1, \mathcal{A}_1)$ y $S_2 = (X_2, \mathcal{A}_2)$ dos superficies de Riemann y sea $f : X_1 \rightarrow X_2$ una función continua.

2.6.1. Función holomorfa. — Diremos que f es una *función holomorfa* (*función analítica*) si en coordenadas locales esta es una función analítica entre abiertos del plano complejo, es decir, para cada punto $p \in X_1$ existen cartas $(U_j, z_j) \in \mathcal{A}_j$ tales que $p \in U_1$ y $f(U_1) \subset U_2$, de manera que

$$z_2 \circ f \circ z_1^{-1} : z_1(U_1) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

es analítica.

Supongamos que f es holomorfa. Siempre es posible encontrar cartas locales (U_1, z_1) y (U_2, z_2) como en la definición tales que $z_1(p) = 0$ y $z_2(f(p)) = 0$ y $z_j(U_j) = \mathbb{D}$. En este caso, la representación local

$$g := z_2 \circ f \circ z_1^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

satisface que

$$g(z) = z^n h(z),$$

donde h es analítica en \mathbb{D} , $h(0) \neq 0$ y $n \geq 1$ es un entero. Se puede verificar que n no depende de la elección de las cartas locales. Decimos que n es la *multiplicidad de f en p* y la denotaremos por el símbolo $\text{mult}_p(f)$.

Cuando tenemos una función holomorfa $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ no-constante, se usa el término *función meromorfa*.

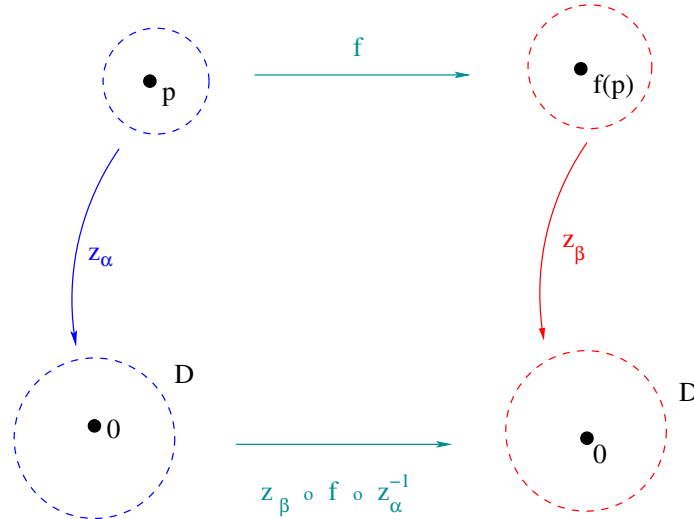


FIGURA 2.2. Expresión local de la función f

2.6.2. Función anti-holomorfa. — Diremos que f es una *función anti-holomorfa* (*función anti-analítica*) si en coordenadas locales esta es una función anti-analítica entre abiertos del plano complejo, es decir, para cada punto $p \in X_1$ existen cartas $(U_j, z_j) \in \mathcal{A}_j$ tales que $p \in U_1$ y $f(U_1) \subset U_2$, de manera que

$$J \circ z_2 \circ f \circ z_1^{-1} : z_1(U_1) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

es analítica, donde $J(z) = \bar{z}$.

2.6.3. Isomorfismos entre superficies de Riemann. — Diremos que las superficies de Riemann S_1 y S_2 son *isomorfas* (*biholomórficamente equivalentes*) si existe un homeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ holomorfo (notar que la inversa debe ser holomorfa). Tal función f es llamada un *biholomorfismo*.

Ejemplo 13. — Las superficies de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ y $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ son isomorfas. Un isomorfismo es dado por el siguiente :

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$$

$$f(z) = [z : 1], \quad z \neq \infty$$

$$f(\infty) = [1 : 0].$$

2.7. Superficies de Riemann son curvas algebraicas

Hemos visto que curvas algebraicas proyectivas suaves definen superficies de Riemann compactas. El propósito de esta sección es ver el recíproco, es decir, verificar que toda superficie de Riemann compacta es isomorfa a una definida por curvas algebraicas. Para esto, primero introduciremos los conceptos necesarios para escribir el Teorema de Riemann-Roch. Una vez introducido este teorema, procederemos a probar lo deseado.

En lo que sigue, S denotará una superficie de Riemann compacta.

2.7.1. Cuerpo de funciones meromorfas. — Denotaremos por $M(S)$ al conjunto de las funciones meromorfas $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ diferentes de la constante ∞ . Este conjunto tiene una estructura natural de cuerpo, conteniendo a \mathbb{C} como subcuerpo, en particular, $M(S)$ es un cuerpo extensión de \mathbb{C} . El cuerpo $M(S)$ es llamado el *cuerpo de funciones meromorfas de S* . Más adelante veremos que este cuerpo es una extensión de \mathbb{C} de grado de trascendencia 1. Por ejemplo, $M(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(z)$.

2.7.2. Divisores. — Un *divisor* de S es un elemento del \mathbb{Z} -módulo $\text{Div}(S)$, generado por las colecciones finitas de puntos de S , es decir, de la forma

$$D = \sum_j m_j p_j,$$

donde $p_j \in S$, $m_j \in \mathbb{Z}$ y sólo para un número finito de índices los enteros m_j pueden ser diferentes de cero. Cuando todos los enteros $m_j \geq 0$ decimos que el divisor es *efectivo*. El *grado* de D es definido como la suma (finita) $\deg(D) = \sum_j m_j \in \mathbb{Z}$.

Dados divisores $D_1 = \sum_j a_j p_j$ y $D_2 = \sum_j b_j q_j$, indicamos con el símbolo $D_1 \geq D_2$ el hecho que $a_j \geq b_j$, para todo j . Notemos en este caso que $\deg(D_1) \geq \deg(D_2)$.

Usualmente, escribimos $D = \sum_j m_j p_j$ como una suma finita al eliminar aquellos términos con $m_j = 0$.

Si $f \in M(S)$, entonces definimos el divisor de f como

$$(f) = a_1 p_1 + \cdots + a_r p_r - b_1 q_1 - \cdots - b_s q_s,$$

donde :

- (i) p_1, \dots, p_r son los diferentes ceros de f , a_j es el orden como cero de p_j ,
- (ii) q_1, \dots, q_s son los diferentes polos de f y b_j el orden como polo de q_j .

Se puede verificar que $\deg(f) = 0$.

Similarmente, si ω es una 1-forma meromorfa de S , entonces le podemos asociar un divisor

$$(\omega) = a_1 p_1 + \dots + a_r p_r - b_1 q_1 - \dots - b_s q_s,$$

donde :

- (i) p_1, \dots, p_r son los ceros de ω , a_j el orden de cero de p_j ,
- (ii) q_1, \dots, q_s son los polos de ω y b_j el orden como polo de q_j .

2.7.3. Teorema de Riemann-Roch. — Dado un divisor $D \in \text{Div}(S)$, uno puede asociarle el \mathbb{C} -espacio vectorial

$$L(D) = \{f \in M(S) - \{0\} : (f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Teorema 2.7.1 (Riemann-Roch's theorem). —

$$\dim(L(D)) = \deg(D) + 1 - g + \dim(L(K - D)),$$

donde K es el divisor de cualquier 1-forma meromorfa de S .

Notemos del teorema de Riemann-Roch que si D es un divisor efectivo, entonces $\dim(L(D)) \leq 1 + \deg(D)$.

2.7.4. El cuerpo $M(S)$ tiene grado de trascendencia 1 sobre \mathbb{C} . — Si D es un divisor efectivo de grado $d \geq g+1$, entonces el Teorema de Riemann-Roch nos asegura que $\dim(L(D)) \geq 2$. En particular, esto prueba la existencia de una función meromorfa no-constante en S ; por lo que vemos que $M(S)$ tiene grado de trascendencia al menos 1 sobre \mathbb{C} .

Supongamos que $M(S)$ tuviese grado de trascendencia al menos 2 sobre \mathbb{C} . Esto nos dice que podemos encontrar dos funciones meromorfas no-constantes de S , digamos $f, g \in M(S)$, las cuales son algebraicamente independientes sobre \mathbb{C} . En particular, cualquier colección finita de productos $f^a g^b$ ($a, b \in \{1, 2, \dots\}$) forman una colección algebraicamente independiente sobre \mathbb{C} . Sean p_1, \dots, p_r los polos de f (donde p_j tiene orden a_j) y

sean q_1, \dots, q_s los polos de g (donde q_j tiene orden b_j). Ahora consideremos el divisor efectivo

$$D = \sum_{j=1}^r a_j p_j + \sum_{j=1}^s b_j q_j.$$

Luego, por lo observado antes, si $d = \deg(D)$, entonces

$$\dim(L(mD)) \leq 1 + \deg(mD) = 1 + md.$$

Si $a + b \leq m$, entonces $f^a g^b \in L(mD)$. Como los elementos $f^a g^b$ son algebraicamente independientes sobre \mathbb{C} , tenemos que

$$\dim(L(mD)) \geq \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Las dos desigualdades anteriores aseguran que

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} \leq 1 + md,$$

lo cual obliga a tener $m \leq 2d - 3$. Esto es una contradicción al hecho que m puede ser escogido de manera arbitraria.

Todo lo anterior es resumido en el siguiente.

Teorema 2.7.2. — *Si S es una superficie de Riemann compacta, entonces su cuerpo de funciones meromorfas $M(S)$ es una extensión de \mathbb{C} de trascendencia igual a 1.*

2.7.5. Superficies de Riemann como curvas algebraicas. —

Teorema 2.7.3. — *Sea S una superficie de Riemann compacta. Entonces existe una curva proyectiva suave C cuya superficie de Riemann es isomorfa a S .*

Demonstración. — Si S no es hiperelíptica de género $g \geq 3$, entonces basta considerar una base de 1-formas holomorfas de S (el cual tiene cardinalidad g); digamos w_1, \dots, w_g . Ahora considerar la función holomorfa

$$H : S \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{g-1} : p \mapsto [w_1(p) : \dots : w_g(p)].$$

Usando el teorema de Riemann-Roch, se puede verificar que $H : S \rightarrow C = H(S)$ es un isomorfismo sobre la curva proyectiva suave C .

En el caso de curvas hiperelípticas de género $g \geq 3$, se puede proceder de manera similar usando una base de 2-formas holomorfas. En el caso de curvas de género $g = 2$, se pueden usar 3-formas holomorfas. De todas maneras, en el caso hiperelíptico, se pueden construir las curvas hiperelípticas vistas anteriormente y proyectivizarlas. Pero las curvas obtenidas tienen puntos singulares, por lo cual hay que hacer una desingularización apropiada.

Superficies de Riemann de género $g = 1$ se pueden describir por curvas generalizadas de Fermat de tipo $(2, 3)$ y la superficie de Riemann de género $g = 0$ es isomorfa a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. □

El Teorema 2.7.3 nos entrega una equivalencia entre las categorías de superficies de Riemann compactas y las curvas proyectivas suaves. Si S es una superficie de Riemann compacta, podemos encontrar una curva proyectiva suave C que la define como superficie de Riemann. Haciendo una proyección de C en el plano complejo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, aquí podemos permitir puntos singulares del tipo nodos, podemos ver que $M(S)$ es isomorfo a $\mathbb{C}(x)[y]/\langle P \rangle$, donde $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ es un polinomio irreducible definiendo la curva plana proyectada. Obtenemos también una equivalencia entre las dos categorías anteriores y la de los cuerpos que son extensiones trascendentales de grado 1 sobre \mathbb{C} .

Ejemplo 14 (toros). — Sean $\tau \in \mathbb{H}$, $G_{\tau} = \langle A(z) = z + 1, B_{\tau}(z) = z + \tau \rangle \cong \mathbb{Z}^2$ y la superficie de Riemann de género uno dada por $T_{\tau} = \mathbb{C}/G_{\tau}$. Sea $\Lambda = \{n + m\tau : n, m \in \mathbb{Z}\}$.

La función

$$\wp(z; \tau) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

es localmente uniformemente convergente en \mathbb{C} a una función meromorfa con únicos polos en los puntos de Λ , cada uno de orden 2. Esta función es llamada la *función \wp de Weierstrass*.

Esta función satisface :

$$\wp(z + \omega; \tau) = \wp(z; \tau), \quad \text{para cada } \omega \in \Lambda,$$

$$\wp'(z + \omega; \tau) = \wp'(z; \tau), \quad \text{para cada } \omega \in \Lambda,$$

$$\begin{aligned}\wp'(z; \tau) &= -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3}, \\ (\wp'(z; \tau))^2 &= 4 (\wp(z; \tau))^3 - g_2 \wp(z; \tau) - g_3,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}g_2 &= 60 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{\omega^2}, \\ g_3 &= 140 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{\omega^3}.\end{aligned}$$

Lo anterior permite ver un isomorfismo entre $T_\tau - \{1 \text{ punto}\}$ y una curva algebraica de grado 3 dada por

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

2.8. Fórmula de Riemann-Hurwitz

Consideremos una función holomorfa no-constante

$$f : S_1 \rightarrow S_2$$

entre dos superficies de Riemann compactas. Supongamos que S_j tiene género g_j .

Teorema 2.8.1. — *Para cada $q \in S_2$ se tiene que la suma*

$$\sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{mult}_p(f)$$

es independiente de q . Este número recibe el nombre de grado de f ; denotado por el símbolo $\text{deg}(f)$.

El resultado anterior es consecuencia de la conectividad de S_2 menos los valores de ramificación de f .

Consideremos ahora una triangulación (suficientemente pequeña) \mathcal{T}_2 de S_2 de manera que los valores de ramificación de f estén contenidos en los vértices de tal triangulación. Denotemos por v el número de vértices, por e el número de ejes y por c el número de caras de \mathcal{T}_2 .

Por la característica de Euler, obtenemos la igualdad

$$2 - 2g_2 = v - e + c.$$

Podemos levantar por f la triangulación \mathcal{T}_2 para obtener una triangulación \mathcal{T}_1 de S_1 . Se puede ver directamente que esta nueva triangulación tiene $\deg(f)e$ ejes y $\deg(f)c$ caras.

El conteo de vértices de \mathcal{T}_1 es un poco más complicado debido al hecho que hay puntos críticos allí. De todas maneras, si un vértice de \mathcal{T}_2 no es valor crítico de f , entonces este produce por levantamiento exactamente $\deg(f)$ vértices de \mathcal{T}_1 .

Notemos, en todo caso, que

$$\begin{aligned} \deg(f) &= \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{mult}_p(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} (1 + (\text{mult}_p(f) - 1)) = \\ &= v_q + \sum_{p \in f^{-1}(q)} (\text{mult}_p(f) - 1), \end{aligned}$$

donde v_q es la cantidad de preimágenes de q por f (es decir, el número de vértices en \mathcal{T}_1 sobre q). Luego, el número de vértices que tiene \mathcal{T}_1 es igual a

$$\deg(f)v - \sum_{p \in S_1} (\text{mult}_p(f) - 1).$$

Usando la característica de Euler, ahora en S_1 y la triangulación \mathcal{T}_1 , obtenemos que

$$2 - 2g_1 = \left(\deg(f)v - \sum_{p \in S_1} (\text{mult}_p(f) - 1) \right) - \deg(f)e + \deg(f)c,$$

de donde obtenemos la siguiente fórmula.

Teorema 2.8.2 (Fórmula de Riemann-Hurwitz). — Si $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una función holomorfa no-constante entre las superficies de Riemann compactas S_1 y S_2 , donde S_j tiene género g_j , entonces

$$2(g_1 - 1) - 2\deg(f)(g_2 - 1) = \sum_{p \in S_1} (\text{mult}_p(f) - 1).$$

Ejemplo 15 (Curvas generalizadas de Fermat). — Consideremos la superficie de Riemann compacta definida por la curva generalizada de Fermat de tipo (k, m) siguiente :

$$C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}}^{(k)} := \left\{ \begin{array}{l} x_1^k + x_2^k + x_3^k = 0 \\ \lambda_1 x_1^k + x_2^k + x_4^k = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{m-2} x_1^k + x_2^k + x_{m+1}^k = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}^m.$$

y la función meromorfa no-constante

$$\begin{aligned} \pi : C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}}^{(k)} &\rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ \pi([x_1 : \dots : x_{m+1}]) &= - \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^k. \end{aligned}$$

Esta función tiene grado k^n y sus valores críticos son dado por los puntos

$$\infty, 0, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}.$$

Además, cada preimágen de cada uno de esos valores es un punto crítico con multiplicidad igual a k .

De hecho, si consideramos las funciones $a_1, \dots, a_m \in \text{PGL}_{m+1}(\mathbb{C})$, donde a_j es multiplicación en la coordenada x_j por $e^{2\pi i/k}$, entonces $H = \langle a_1, \dots, a_m \rangle \cong \mathbb{Z}_k^m$ es un grupo de automorfismos holomorfos de $C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}}^{(k)}$ y $\pi : C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}}^{(k)} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ resulta ser un cubriente ramificado regular con grupo cobertor H .

Por la fórmula de Riemann-Hurwitz, obtenemos en este caso que

$$g = \frac{m-1}{2}k^m - \frac{m+1}{2}k^{m-1} + 1.$$

Por ejemplo, si $k = 2$ y $m = 3$, obtenemos $g = 2^3 - 2^3 + 1 = 1$.

Si $m = 2$, entonces estamos en presencia de una curva de Fermat de grado k y su género es $g = (k-1)(k-2)/2$.

2.9. Automorfismos de superficies de Riemann

2.9.1. Automorfismos holomorfos. — Un biholomorfismo $f : S \rightarrow S$, donde S es una superficie de Riemann, es llamado un *automorfismo holomorfo* de S . La colección de todos los automorfismos de la superficie de Riemann S es un grupo bajo la composición y es denotado por $\text{Aut}^+(S)$.

2.9.2. Automorfismos anti-holomorfos. — Un homeomorfismo $f : S \rightarrow S$, donde S es una superficie de Riemann, es llamado un *automorfismo anti-holomorfo* de S si f es anti-holomorfa (su inversa es automáticamente anti-holomorfa). La colección de todos los automorfismos (holomorfos y anti-holomorfos) de la superficie de Riemann S es un grupo bajo la composición y es denotado por $\text{Aut}(S)$. En este caso, $\text{Aut}^+(S)$ es un subgrupo de índice 1 o 2.

Ejemplo 16. — $\text{Aut}^+(\widehat{\mathbb{C}}) \cong \text{PGL}_2(\mathbb{C})$. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})$$

actúa como la transformación de Möbius

$$T_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Los automorfismos anti-holomorfos de $\widehat{\mathbb{C}}$ son de la forma

$$L_A(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

Ejemplo 17. —

$$\text{Aut}^+(\mathbb{C}) = \{A(z) = az + b; a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$$

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \langle \text{Aut}^+(\mathbb{C}), J(z) = \bar{z} \rangle$$

Ejemplo 18. — $\text{Aut}^+(\mathbb{H}) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$$

actúa como la transformación de Möbius

$$T_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) = \langle \text{Aut}^+(\mathbb{H}), E(z) = -\bar{z} \rangle$$

Ejemplo 19. — Consideremos la curva de Fermat de grado $k \geq 3$

$$F_k := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 : x^k + y^k + z^k = 0\}.$$

$$\text{Aut}^+(F_k) = \langle a_1, a_2 \rangle \rtimes \langle b_1, b_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_k^2 \rtimes \mathfrak{S}_3,$$

donde

$$a_1[x : y : z] = [e^{2\pi i/k} x : y : z],$$

$$a_2[x : y : z] = [x : e^{2\pi i/k} y : z],$$

$$b_1[x : y : z] = [y : x : z],$$

$$b_2[x : y : z] = [z : x : y].$$

$$\text{Aut}(F_k) = \langle \text{Aut}^+(F_k), J([x : y : z] = [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}]) \rangle \cong \text{Aut}^+(F_k) \times \mathbb{Z}_2.$$

Ejemplo 20. — Consideremos la superficie de Riemann compacta definida por la curva generalizada de Fermat de tipo (k, m) siguiente :

$$C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}}^{(k)} := \left\{ \begin{array}{l} x_1^k + x_2^k + x_3^k = 0 \\ \lambda_1 x_1^k + x_2^k + x_4^k = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{m-2} x_1^k + x_2^k + x_{m+1}^k = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}^m.$$

Como ya hemos observado en el Ejemplo 15, las funciones $a_1, \dots, a_m \in \text{PGL}_{m+1}(\mathbb{C})$, donde a_j es multiplicación en la coordenada x_j por $e^{2\pi i/k}$, entonces $H = \langle a_1, \dots, a_m \rangle \cong \mathbb{Z}_k^m$ es un grupo de automorfismos holomorfos de $C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}}^{(k)}$ y

$$\pi : C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}}^{(k)} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} : [x_1 : \dots : x_{m+1}] \mapsto - \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^k$$

resulta ser un cubriente ramificado regular con grupo cobertor H .

1. Si $m = 2$, entonces estamos en presencia de la curva clásica de Fermat F_k . Ya hemos visto en el Ejemplo 19 que debe haber un grupo de automorfismos extra isomorfo a \mathfrak{S}_3 de manera que el grupo total de automorfismos holomorfos de la curva F_k es $H \rtimes \mathfrak{S}_3$.

2. Si $m = 3$, entonces podemos construir un subgrupo de automorfismos $A < \text{Aut}(C_{\lambda_1}^{(k)})$ tal que $H \triangleleft A$ y $A/H \cong \mathbb{Z}_2^2$. En la situación genérica, no hay más automorfismos holomorfos.
3. Si $m \geq 4$, entonces genéricamente $\text{Aut}(C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}}^{(k)}) = H$.

Ejemplo 21. — Sean $\tau \in \mathbb{H}$, $G_\tau = \langle A(z) = z + 1, B_\tau(z) = z + \tau \rangle \cong \mathbb{Z}^2$ y la superficie de Riemann de género uno dada por $T_\tau = \mathbb{C}/G_\tau$.

1. Las translaciones $T(z) = z + r$, donde $r \in \mathbb{C}$, inducen automorfismos holomorfos del toro T_τ que no tienen puntos fijos. Todos estos automorfismos definen un grupo isomorfo a $S^1 \times S^1$.
2. La transformación $E(z) = -z$ también induce un automorfismo holomorfo de orden 2 sobre T_τ , actuando con 4 puntos fijos.
3. Cuando $\tau \in \{i, (1 - i\sqrt{3})/2\}$, entonces T_τ tiene más automorfismos.

2.9.3. Teorema de Hurwitz. —

Teorema 2.9.1. — Si S es una superficie de Riemann de género $g \geq 2$, entonces $\text{Aut}(S)$ es un grupo finito. De hecho,

$$|\text{Aut}^+(S)| \leq 84(g - 1).$$

Existen infinitos valores de $g \geq 2$ para los cuales existe una superficie de Riemann de género g con $\text{Aut}^+(S)$ de orden $84(g - 1)$ (estas superficies de Riemann son llamadas *curvas de Hurwitz*). El primer género donde existe una curva de Hurwitz es $g = 3$ y esta es única módulo isomorfismos; dada por la curva de Klein $\{x^3y + y^3z + z^3x = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. El siguiente género admitiendo curvas de Hurwitz es $g = 7$ (curva de Fricke-Macbeath). También se sabe que existen infinitos valores de g para los cuales no hay curvas de Hurwitz.

CAPÍTULO 3

EL TEOREMA DEL DESCENSO DE WEIL

3.1. Cuerpos de definición de superficies de Riemann

Sea S una superficie de Riemann compacta. Un subcuerpo \mathbb{K} de \mathbb{C} es llamado un *cuerpo de definición* de S si existe una curva algebraica proyectiva suave C , definida por polinomios homogéneos con coeficientes en \mathbb{K} , que es isomorfa a S como superficie de Riemann. También decimos que S es *definible* sobre \mathbb{K} .

3.2. Cuerpos de móduli de superficies de Riemann

Consideremos una superficie de Riemann compacta S y sea C una curva algebraica proyectiva suave, definida por los polinomios homogéneos P_1, \dots, P_r , la cual define una superficie de Riemann isomorfa a S .

Sea $\text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$, el grupo de los automorfismos de cuerpo de \mathbb{C} .

Para $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ y $j = 1, \dots, r$, definimos el polinomio P_j^σ como aquel obtenido a partir de P_j al reemplazar cada uno de sus coeficientes por su imagen por σ . La curva algebraica C^σ , definida por estos nuevos polinomios homogéneos $P_1^\sigma, \dots, P_r^\sigma$, sigue siendo suave y define una superficie de Riemann compacta homeomorfa a S (pero podría no ser isomorfa).

Si consideremos el grupo

$$G_C = \{\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q}) : C^\sigma \cong C\},$$

entonces el cuerpo fijo $\mathcal{M}(S)$ de G_C es llamado el *cuerpo de móduli* de S .

Observemos en lo anterior que si $C \cong \widehat{C}$, entonces $G_C = G_{\widehat{C}}$. Luego, la definición anterior no depende de la elección de C que represente a S . De esta manera, el cuerpo de módulos de S queda bien definido.

Teorema 3.2.1 (Koizumi). — *Sea S una superficie de Riemann compacta. Entonces :*

1. S es definible sobre una extensión finita de $\mathcal{M}(S)$.
2. $\mathcal{M}(S)$ es igual a la intersección de todos los cuerpos de definición de S .

3.2.1. Género cero. — Por el teorema de uniformización, toda superficie de Riemann de género cero es isomorfa a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$; en particular, ellas son definidas sobre su cuerpo de módulos el cual es \mathbb{Q} .

3.2.2. Género uno. — Toda superficie de Riemann de género uno puede ser descrita por una curva elíptica

$$E_{\lambda} = \{y^2z = x(x-z)(x-\lambda z)\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \quad (\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}).$$

El cuerpo de módulos de E_{λ} es $\mathbb{Q}(j(\lambda))$, donde j es la j -función modular de Klein

$$j(\lambda) = \frac{4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{27\lambda^2(\lambda - 1)^2}.$$

Se sabe que E_{λ} (so $C_{\lambda}^{(2)}$) es definible sobre $\mathbb{Q}(j(\lambda))$; de manera más concreta, $E_{\lambda} \cong C_{\lambda}^{(2)}$ es isomorfa a

1. (si $j(\lambda) \notin \{0, 1728\}$)

$$x_1^2x_2 + x_0x_1x_2 - x_0^3 + \frac{36}{j(\lambda) - 1728}x_0x_2^2 + \frac{1}{j(\lambda) - 1728}x_2^3 = 0,$$

2. (si $j(\lambda) = 0$)

$$x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - x_0^3 = 0,$$

3. (si $j(\lambda) = 1728$)

$$x_1^2x_2 - x_0^3 - x_0x_2^2 = 0.$$

Se puede verificar que toda superficie de Riemann de género uno puede ser descrita por una curva de Fermat generalizada de tipo (2, 3). De hecho, E_{λ} es isomorfa a la curva

$$C_{\lambda}^{(2)} := \left\{ \begin{array}{l} x_1^k + x_2^k + x_3^k = 0 \\ \lambda x_1^k + x_2^k + x_4^k = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}^3$$

3.2.3. Género al menos dos. — Ahora, si la superficie de Riemann tiene género $g \geq 2$, entonces el cuerpo de móduli no es necesariamente un cuerpo de definición. Ejemplos de esta situación fueron provistos por Earle [9], Shimura [29] y Huggins [18, 19] para el caso de superficies de Riemann hiperelípticas. Para el caso de superficies de Riemann no-hiperelípticas, tales ejemplos fueron provistos por Hidalgo [16] y Kontogeorgis [25].

3.3. El teorema del descenso de Weil

El siguiente teorema, llamado el teorema del descenso de Galois de Weil, nos entrega condiciones suficientes para que una curva definida sobre una extensión de Galois finita de un cuerpo dado se pueda definir sobre este último.

Teorema 3.3.1 (Teorema del descenso de Galois de Weil [30])

Sea C una curva algebraica compleja proyectiva suave, definida sobre un subcuerpo \mathbb{F} de \mathbb{C} . Sea \mathbb{K} un subcuerpo de \mathbb{F} de manera que la extensión \mathbb{F}/\mathbb{K} sea de grado finito y Galois.

Supongamos que para cada $\sigma \in \Gamma = \text{Aut}(\mathbb{F}/\mathbb{K})$ existe un isomorfismo $f_\sigma : C \rightarrow C^\sigma$, definido sobre \mathbb{F} , satisfaciendo, para cada par $\sigma, \tau \in \Gamma$, la condición de compatibilidad $f_{\tau\sigma} = f_\sigma^\tau \circ f_\tau$.

Entonces existe una curva algebraica proyectiva suave E , definida sobre \mathbb{K} , y existe un isomorfismo $Q : C \rightarrow E$, definido sobre \mathbb{F} , de manera que, para cada $\sigma \in \Gamma$, se satisface que $Q^\sigma \circ f_\sigma = Q$.

El teorema anterior puede escribirse sin tener que involucrar extensiones finitas de Galois, pero debemos requerir que su género sea al menos dos (para tener un grupo de automorfismos finito).

Teorema 3.3.2 (teorema del descenso de Weil). — *Sea C una curva algebraica compleja proyectiva suave de género $g \geq 2$ y sea \mathbb{K} un subcuerpo de \mathbb{C} .*

Supongamos que para cada $\sigma \in \Gamma = \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{K})$ existe un biholomorfismo $f_\sigma : C \rightarrow C^\sigma$ satisfaciendo, para cada par $\sigma, \tau \in \Gamma$, la condición de compatibilidad $f_{\tau\sigma} = f_\sigma^\tau \circ f_\tau$.

Entonces existe una curva algebraica proyectiva suave E , definida sobre \mathbb{K} , y existe un biholomorfismo $Q : C \rightarrow E$ de manera que, para cada $\sigma \in \Gamma$, se satisface que $Q^\sigma \circ f_\sigma = Q$.

Demonstración. — Sabemos que el cuerpo de módulos de C está contenido en \mathbb{K} . También sabemos que C puede definirse sobre una extensión finita de su cuerpo de módulos [24]. De esta manera, podemos suponer que C está definida sobre una extensión finita de Galois \mathbb{L} de \mathbb{K} .

Sea $\overline{\mathbb{L}}$ la clausura algebraica de \mathbb{L} en \mathbb{C} . Como cada $\sigma \in \Gamma$ actúa como la identidad en \mathbb{L} , este define un automorfismo de $\overline{\mathbb{L}}$. Luego, de la teoría clásica de Galois, tenemos que σ actúa como un automorfismo de $\overline{\mathbb{L}}$.

Si $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\overline{\mathbb{L}})$, entonces $C^\tau = C$ y, en particular, $\tau \in \Gamma$ and $f_\tau \in \text{Aut}(C)$. Además, para cada $\sigma \in \Gamma$ vale que $f_\sigma^\tau : C \rightarrow C^{\tau\sigma} = C^\sigma$. Como $f_\sigma \circ f_\sigma^\tau \in \text{Aut}(C)$, y este grupo es finito (ya que C tiene género al menos dos), podemos concluir que necesariamente f_σ está definido sobre $\overline{\mathbb{L}}$ (toda extensión finita de un cuerpo algebraicamente cerrado es trivial).

Consideremos la función

$$\begin{aligned} \Theta : \text{Aut}(\mathbb{C}/\overline{\mathbb{L}}) &\rightarrow \text{Aut}(C) \\ \sigma &\mapsto f_\sigma^{-1}. \end{aligned}$$

Ya que, para cada $\sigma \in \Gamma$ el isomorfismo f_σ está definido sobre $\overline{\mathbb{L}}$, la condición $f_{\eta\tau} = f_\tau^\eta \circ f_\eta$ nos asegura que Θ es un homomorfismo de grupos.

Como $\text{Aut}(C)$ es finito, el núcleo de Θ es un subgrupo de índice finito de $\text{Aut}(\mathbb{C}/\overline{\mathbb{L}})$. De esta manera, su cuerpo fijo \mathbb{N} es una extensión finita de $\overline{\mathbb{L}}$. Como este último cuerpo es algebraicamente cerrado, debemos tener $\mathbb{N} = \overline{\mathbb{L}}$. Luego, el núcleo de Θ es todo $\text{Aut}(\mathbb{C}/\overline{\mathbb{L}})$. Todo esto nos permite asegurar que si $\tau, \sigma \in \Gamma$ tienen la misma restricción a $\overline{\mathbb{L}}$, entonces $f_\tau = f_\sigma$.

Ya que \mathbb{L} es una extensión finita de Galois de \mathbb{K} , vemos que sólo hay un número finito de curvas de la forma C^τ , donde $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{K})$. En particular, solo un número finitas de ellas isomorfas a C . Esto último (junto con el hecho que $\text{Aut}(C)$ es finito) nos asegura que sólo hay un número finito de isomorfismos f_σ , para $\sigma \in \Gamma$. Luego, podemos agrandar \mathbb{L} a una extensión finita de Galois de \mathbb{K} si es necesario para asumir que C y todos los isomorfismos f_σ están definidos sobre \mathbb{L} y que además $f_\sigma \neq f_\tau$ si $\sigma, \tau \in \text{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ son diferentes.

□

3.3.1. Caso genérico. — Genéricamente, toda superficie de Riemann compacta de género $g \geq 3$ no tiene automorfismos holomorfos (salvo la identidad). En tal caso, el teorema del descenso de Weil nos permite concluir que ella se puede definir sobre su cuerpo de móduli.

Por otro lado, Wolfart [31] ha verificado que si $S/\text{Aut}^+(S)$ es de género cero y tiene tres valores cónicos (se dice que S es casiplatónica), entonces S se puede definir sobre su cuerpo de móduli. De hecho, esto es algo más general, si $S/\text{Aut}^+(S)$ es de género cero y tiene una cantidad impar de valores cónicos, entonces S se puede definir sobre su cuerpo de móduli (resultados de Dèbes-Emsalem [8]).

De esta manera, vemos que aquellas superficies de Riemann que no se pueden definir sobre su cuerpo de móduli son bastante raras de encontrar.

3.3.2. Caso hiperelíptico. — En el caso que S sea una superficie de Riemann hiperelíptica, se sabe lo siguiente. Sea $\iota : S \rightarrow S$ la involución hiperelíptica (la cual es única). Como ι pertenece al centro de $\text{Aut}^+(S)$, entonces podemos mirar el grupo cociente $\text{Aut}_{red}^+(S) = \text{Aut}^+(S)/\langle \iota \rangle$, llamado el *grupo reducido de automorfismos* de S .

1. Si $g = 2$ y $\text{Aut}_{red}^+(S)$ no es trivial, entonces S se puede definir sobre su cuerpo de móduli (Quer-Cardona [2]).
2. Existen superficies de Riemann de género $g = 2$ con $\text{Aut}_{red}^+(S)$ trivial, que no se pueden definir sobre su cuerpo de móduli (Earle [9], Shimura [29]).
3. Si $g \geq 3$ es impar y $\text{Aut}_{red}^+(S)$ es trivial, entonces S se puede definir sobre su cuerpo de móduli (Lercier-Rithenzler [27]).
4. Si $g \geq 3$ y $\text{Aut}_{red}^+(S)$ no es trivial ni cíclico, entonces S se puede definir sobre su cuerpo de móduli (Huggins [18, 19]).
5. Existen superficies de Riemann hiperelípticas de género $g \geq 3$ y $\text{Aut}_{red}^+(S)$ cíclico no-trivial que no se pueden definir sobre su cuerpo de móduli (Huggins [18, 19]).

Se conjetura (esto lo aprendí de J. Wolfart) que toda superficie de Riemann compacta se puede definir sobre un cuerpo que es extensión de grado a lo más 2 de su cuerpo de móduli. He logrado ver que esta propiedad vale en muchos casos.

Teorema 3.3.3. — *Si S una superficie de Riemann tal que $S/\text{Aut}^+(S)$ es (i) de género a lo más 2 o bien (ii) una superficie hiperelítica, entonces S se puede definir sobre una extensión de grado dos de su cuerpo de móduli. En particular, esto vale para superficies de Riemann de género $g \leq 4$, superficies de Riemann hiperelíticas y superficies de Riemann de Fermat generalizadas.*

En los ejemplos conocidos, de superficies de Riemann compactas que no se pueden definir sobre su cuerpo de móduli, se tiene que este cuerpo de móduli es un subcuerpo de \mathbb{R} , pero que \mathbb{R} no es un cuerpo de definición (volveremos a esta situación en el próximo capítulo). En particular, en tales ejemplos conocidos, la superficie se define sobre una extensión de grado 2 no-real.

No conozco en la literatura un ejemplo de una superficie de Riemann que tenga cuerpo de móduli \mathbb{Q} , que este no sea cuerpo de definición, y que se pueda definir sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Al parecer, junto a S. Quispes hemos logrado construir ejemplos explícitos de superficies de Riemann (tanto hiperelíticas como no-hiperelíticas) que están definidas sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, cuyo cuerpo de móduli es \mathbb{Q} , pero que no se pueden definir sobre \mathbb{Q} .

CAPÍTULO 4

SUPERFICIES DE RIEMANN REALES

4.1. Superficies de Riemann reales

Hemos ya visto que una superficie de Riemann compacta S puede ser descrita por una curva algebraica proyectiva suave $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. La curva C es definida por una colección finita de polinomios homogéneos con coeficientes en \mathbb{C} . La curva C no es única y es posible encontrar otras tales curvas definiendo S .

Diremos que S es una *superficie de Riemann real* (*superficie de Riemann simétrica*) si es posible encontrar una curva C de manera que los polinomios que la definen tengan coeficientes en \mathbb{R} .

4.2. Condición necesaria y suficiente para ser superficie de Riemann real

4.2.1. Una condición necesaria. — Supongamos que la superficie de Riemann compacta S es real, es decir, existe una curva algebraica proyectiva suave $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, definida como los ceros comunes de los polinomios homogéneos

$$P_1, \dots, P_{n-1} \in \mathbb{R}[z_0 : \dots : z_n].$$

Consideremos la conjugación

$$\begin{aligned} J : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \\ [z_0 : \dots : z_n] &\mapsto [\bar{z}_0 : \dots : \bar{z}_n]. \end{aligned}$$

Esta función J deja invariante C y define (por restricción a ella) un automorfismo anti-holomorfo de orden 2. Es decir, S admite un automorfismo anti-holomorfo de orden 2 (llamada una *simetría* de S). Hemos concluido la siguiente condición necesaria.

Proposición 4.2.1. — *Toda superficie de Riemann real admite una simetría.*

4.2.2. La condición necesaria anterior es suficiente. — Supongamos ahora que tenemos una superficie de Riemann compacta S que admite una simetría, es decir, un automorfismo anti-holomorfo de orden 2, digamos $\tau : S \rightarrow S$.

En el caso no-hiperelíptico, se puede encontrar una base de diferenciales holomorfas de S , digamos $\omega_1, \dots, \omega_g$, que es invariante bajo la acción de τ (en el sentido que al hacer un pull-back de cualquiera de ellas obtenemos la conjugada de alguna de ellas). Al considerar la incrustación holomorfa

$$\begin{aligned} \phi : S &\rightarrow \phi(S) = C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{g-1} \\ p &\mapsto [\omega_1(p) : \dots : \omega_g(p)] \end{aligned}$$

la simetría τ define una simetría de C , la cual se puede asumir tener la forma

$$\begin{aligned} R : C &\rightarrow C \\ [z_0 : \dots : z_n] &\mapsto [R_0(\bar{z}_0, \dots, \bar{z}_n) : \dots : R_n(\bar{z}_0, \dots, \bar{z}_n)] \end{aligned}$$

donde $R_0, \dots, R_n \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ son polinomios homogéneos del mismo grado.

En el caso que S es hiperelíptica, la situación anterior también funciona usando diferenciales holomorfas de mayor orden.

Supongamos que la curva algebraica proyectiva suave $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, está definida como los ceros comunes de los polinomios homogéneos

$$P_1, \dots, P_{n-1} \in \mathbb{C}[z_0 : \dots : z_n],$$

que define a S (es decir, como superficies de Riemann son isomorfas).

Sea $\bar{C} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ la curva definida por los polinomios

$$\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_{n-1} \in \mathbb{C}[z_0 : \dots : z_n],$$

donde \bar{P}_j se obtiene del polinomio P_j al reemplazar sus coeficientes por sus conjugados complejos. Se puede verificar que \bar{C} es suave, luego define una nueva superficie de Riemann compacta, digamos \bar{S} .

La conjugación J antes definida satisface que $J(C) = \bar{C}$ y, además,

$$J : C \rightarrow \bar{C}$$

resulta un isomorfismo anti-holomorfo entre superficies de Riemann. Luego,

$$F := J \circ R : C \rightarrow \overline{C}$$

resulta ser un isomorfismo holomorfo.

$\overline{F} = J \circ F \circ J = R \circ J$ es la función obtenida de F al reemplazar cada uno de sus coeficientes por su complejo conjugado.

Notemos que

$$\overline{F} : \overline{C} \rightarrow C$$

es un isomorfismo holomorfo y que

$$\overline{F} \circ F = I.$$

El Teorema del descenso de Weil asegura que existe una curva algebraica proyectiva suave $D \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^m$, definida por polinomios homogéneos con coeficientes reales, que es isomorfa a C .

En resumen :

Teorema 4.2.2. — *Sea S una superficie de Riemann compacta. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes.*

1. S es simétrica.
2. S es una superficie de Riemann real.

4.3. Ejemplos

Ejemplo 22. — La esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ admite muchas simetrías; por ejemplo, $T(z) = \bar{z}$ (la cual tiene puntos fijos) y $L(z) = -1/\bar{z}$ (la cual no tiene puntos fijos). Como esta superficie es isomorfa a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, vemos que es real.

Ejemplo 23. — Sea $\tau \in \mathbb{H}$, y consideremos el toro $S_{\tau} = \mathbb{C}/G_{\tau}$, donde G_{τ} está generado por las translaciones $A(z) = z + 1$ y $B_{\tau}(z) = z + \tau$. Si se tiene que $|\tau| = 1$ o bien $\text{Re}(\tau) \in \{0, 1/2\}$, entonces se puede verificar que S_{τ} es simétrica. De manera más general, S_{τ} es simétrica si y sólo si τ se puede llevar por $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) < \text{Aut}^+(\mathbb{H})$ a un τ como arriba.

Ejemplo 24. — La curva de Fermat de grado k ,

$$F_k := \{x^k + y^k + z^k = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$$

es simétrica. Una simetría es dada por la restricción de la conjugación

$$\begin{aligned} J : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \\ [x : y : z] &\mapsto [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}] \end{aligned}$$

Ejemplo 25. — La curva generalizada de Fermat de tipo $(k, 3)$

$$C_{\lambda}^{(k)} := \left\{ \begin{array}{l} x_1^k + x_2^k + x_3^k = 0 \\ \lambda x_1^k + x_2^k + x_4^k = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$$

donde $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ es simétrica si y sólo si

$$j(\lambda) = \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2} \in \mathbb{R}.$$

Ejemplos de tales valores de λ son :

1. $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.
2. $|\lambda| = 1, \lambda \neq 1$.
3. $\lambda = \frac{1 + ai}{2}, a \in \mathbb{R}$.

CAPÍTULO 5

CURVAS DE BELYI

5.1. Curvas de Belyi, funciones de Belyi y pares de Belyi

Una superficie de Riemann compacta S es llamada una *curva de Belyi* si existe una función meromorfa no-constante

$$\beta : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

cuyos valores de ramificación están contenidos en $\{\infty, 0, 1\}$.

La función β anterior es llamada una *función de Belyi* y el par (S, β) es llamado un *par de Belyi*. El género de S es también llamado el género del par de Belyi (S, β) .

Ejemplo 26 (Esfera de Riemann). — La esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ es una curva de Belyi. Por ejemplo, $\beta(z) = z$ es una función de Belyi (la cual no tiene valores de ramificación).

Otras funciones de Belyi para $\hat{\mathbb{C}}$, son por ejemplo,

1. $\beta(z) = z^n$, donde $n \in \{2, 3, \dots\}$. En estos casos, los únicos valores de ramificación son 0 y ∞ .
2. $\beta(z) = 4z(1 - z)$. Esta función de Belyi tiene como valores de ramificación a 1 y ∞ .
3. Los siguientes ejemplos provienen de los *polinomios de Tchebyshev* $T_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, definidos como

$$T_1(z) = z$$

$$T_2(z) = 2z^2 - 1$$

$$T_{n+1}(z) = 2zT_n(z) - T_{n-1}(z), \quad n \geq 2.$$

El polinomio de Tchebyshev T_n tiene grado n y satisface las siguientes propiedades :

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

$$T_n : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$$

T_n tiene sus ceros (todos simples) en los puntos

$$\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \dots, n,$$

entre dos ceros consecutivos de T_n hay un cero doble de $T_n - 1$ o un cero doble de $T_n + 1$, y

$$T_n(-1), T_n(1) \in \{-1, 1\}.$$

Vemos que T_1 y T_2 son funciones de Belyi, pero T_n no lo es para $n \neq 3$. De todas maneras, $\beta_n(z) = T_n^2(z)$ sí resulta ser una función de Belyi.

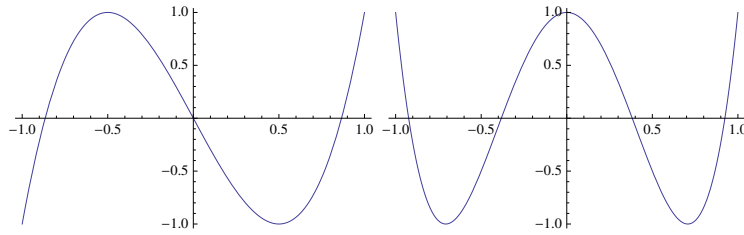


FIGURA 5.1. Gráficas de $T_3(z) = 4z^3 - 3z$ y $T_4(z) = 8z^4 - 8z^2 + 1$

Ejemplo 27 (Curvas de Fermat). — La curva de Fermat

$$F_k := \{x^k + y^k + z^k = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$$

es una curva de Belyi. Una función de Belyi es dada, por ejemplo,

$$\beta([x : y : z]) = -\left(\frac{y}{x}\right)^k$$

la cual tiene como valores de ramificación a ∞ , 0 y 1 (cada uno de orden k).

Ejemplo 28. — Sea $H < \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ un grupo no-trivial finito de transformaciones de Möbius. Sea sabe que debemos tener alguna de las siguientes posibilidades :

1. $H \cong \mathbb{Z}_n$ (grupo cíclico de orden n); en cuyo caso $\mathcal{O}_{(n,n)} = \widehat{\mathbb{C}}/H$ es la esfera de Riemann con dos puntos cónicos de orden n .
2. $H \cong \mathbb{D}_n$ (grupo dihedral de orden $2n$); en cuyo caso $\mathcal{O}_{(2,2,n)} = \widehat{\mathbb{C}}/H$ es la esfera de Riemann con tres puntos cónicos de ordenes 2, 2 y n .
3. $H \cong \mathcal{A}_4$ (grupo alternante de orden 12); en cuyo caso $\mathcal{O}_{(2,3,3)} = \widehat{\mathbb{C}}/H$ es la esfera de Riemann con tres puntos cónicos de ordenes 2, 3 y 3.
4. $H \cong \mathcal{A}_5$ (grupo alternante de orden 60); en cuyo caso $\mathcal{O}_{(2,3,5)} = \widehat{\mathbb{C}}/H$ es la esfera de Riemann con tres puntos cónicos de ordenes 2, 3 y 5.
5. $H \cong \mathfrak{S}_4$ (grupo simétrico de orden 24); en cuyo caso $\mathcal{O}_{(2,3,4)} = \widehat{\mathbb{C}}/H$ es la esfera de Riemann con tres puntos cónicos de ordenes 2, 3 y 4.

En cada uno de los casos posible, podemos encontrar una función racional $\beta_H : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de grado $|H|$ tal que $\beta_H(h(z)) = \beta_H(z)$, para cada $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ y cada $h \in H$, de manera que sus valores de ramificación estén contenidos en el conjunto $\{\infty, 0, 1\}$ (luego una función de Belyi para $\widehat{\mathbb{C}}$).

Ahora, supongamos que tenemos una superficie de Riemann S y una función meromorfa no-constante $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, de manera que sus valores de ramificación estén contenidos en el conjunto de los puntos fijos de los elementos no-triviales de H . Entonces, $\beta = \beta_H \circ f$ resulta ser una función de Belyi de S , en particular, que S es una curva de Belyi.

Ejemplo 29 (Un caso particular del ejemplo anterior)

Consideremos la superficie de Riemann (de género 1) asociada a la curva generalizada de Fermat

$$C_{-1}^{(2)} := \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ -x_1^k + x_2^2 + x_4^2 = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3.$$

Tenemos la función meromorfa

$$f : C_{-1}^{(2)} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

$$f([x_1 : x_2 : x_3 : x_4]) = - \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2.$$

Los valores de ramificación de F son dados por $\infty, 0, 1$ y -1 .

En este ejemplo tomamos $H = \langle h(z) = -z \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ y $\beta_H(z) = z^2$. Entonces,

$$\beta([x_1 : x_2 : x_3 : x_4]) = \beta_H \circ f([x_1 : x_2 : x_3 : x_4]) = \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^4$$

es una función de Belyi para $C_{-1}^{(2)}$.

5.2. Teorema de Belyi

Como consecuencia del teorema del descenso de Weil, se puede obtener una caracterización algebraica de las curvas de Belyi.

Teorema 5.2.1 (Teorema de Belyi, 1980). — *Sea S una superficie de Riemann compacta. Entonces las siguientes son equivalentes.*

1. S es una curva de Belyi.
2. S es definible sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

La implicancia (1) hacia (2) es consecuencia del teorema del descenso de Weil. Para ver la otra dirección, Belyi construye de manera explícita una función de Belyi.

5.3. Equivalencia de pares de Belyi

Una consecuencia directa del teorema de Belyi es el siguiente. Si (S, β) es un par de Belyi, entonces podemos encontrar un par de Belyi (C, β_C) , donde C es una curva algebraica proyectiva suave definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ (y β_C es una función racional también definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$) y un biholomorfismo $f : S \rightarrow C$ tal que $\beta_C \circ f = \beta$.

Diremos que dos pares de Belyi, (S_1, β_1) y (S_2, β_2) , son *isomorfos* (denotado esto con el símbolo $(S_1, \beta_1) \cong (S_2, \beta_2)$) si existe un biholomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ tal que $\beta_2 \circ f = \beta_1$.

5.4. Automorfismos de pares de Belyi

Consideremos un par de Belyi (S, β) .

Un *automorfismo holomorfo* de (S, β) es un automorfismo holomorfo $f : S \rightarrow S$ tal que $\beta = \beta \circ f$.

Un *automorfismo anti-holomorfo* de (S, β) es un automorfismo anti-holomorfo $h : S \rightarrow S$ tal que $\beta \circ h = J \circ \beta$, donde $J(z) = \bar{z}$.

Denotaremos por $\text{Aut}(S, \beta)$ al grupo de todos los automorfismos (holomorfos y anti-holomorfos) del par de Belyi (S, β) y por $\text{Aut}^+(S, \beta)$ a su subgrupo de los automorfismos holomorfos.

Ejemplo 30. — Sea $S = \widehat{\mathbb{C}}$ y $\beta(z) = z^3$. Entonces (S, β) es un par de Belyi. Podemos ver que

$$f(z) = e^{2\pi i/3} z \in \text{Aut}^+(S, \beta)$$

$$h(z) = \bar{z} \in \text{Aut}(S, \beta) - \text{Aut}^+(S, \beta).$$

De hecho, se puede verificar que

$$\mathbb{Z}_3 \cong \langle f \rangle = \text{Aut}^+(S, \beta)$$

$$\mathfrak{S}_3 \cong \langle f, h \rangle = \text{Aut}(S, \beta).$$

5.5. Par de Belyi regular

Un par de Belyi (S, β) es llamado *regular* si el grado de β coincide con el orden de $\text{Aut}^+(S, \beta)$; en otras palabras, la función β es un cubriente ramificado regular dado por la acción del grupo $\text{Aut}^+(S, \beta)$.

Del ejemplo anterior, podemos ver que $(\widehat{\mathbb{C}}, \beta(z) = z^3)$ es un par de Belyi regular. Otros ejemplos de tal tipo son los dados anteriormente en el Ejemplo 28 usando $H < \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ finito y β_H .

5.6. Pares de Belyi reales

Diremos que un par de Belyi (S, β) es *real* si existe una simetría de S , digamos $R : S \rightarrow S$, de manera que $\beta \circ R = J \circ \beta$, donde $J(z) = \bar{z}$.

Luego, por lo visto anteriormente, S es definible sobre \mathbb{R} . Por otro lado, por el teorema de Belyi, S también es definible sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Un resultado debido a Köck-Singerman [22] y Koeck-Lau [23], asegura que es posible definir S sobre $\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$.

5.7. Acción del grupo absoluto de Galois sobre pares de Belyi

Consideremos un par de Belyi (S, β) . Sabemos, por el teorema de Belyi, que (S, β) es isomorfa un par de Belyi (C, β_C) , donde C es una curva algebraica proyectiva suave y β_C es una función racional, ambas definidas sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Supongamos que C está definida por los polinomios homogéneos P_1, \dots, P_r , con coeficientes en $\overline{\mathbb{Q}}$, y que $\beta_C = P/Q$, donde P y Q son polinomios homogéneos del mismo grado, también definidos sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Si $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, entonces podemos considerar los nuevos polinomios homogéneos, $P_1^\sigma, \dots, P_r^\sigma, P^\sigma$ y Q^σ . Sea C^σ la curva algebraica proyectiva suave definida por $P_1^\sigma, \dots, P_r^\sigma$ y sea $\beta^\sigma = P^\sigma/Q^\sigma$. Entonces, (C^σ, β^σ) es otro par de Belyi, del mismo género que (C, β) , pero que podrían no ser isomorfos.

El cuerpo fijo del grupo $G_{(C, \beta)} = \{\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) : (C^\sigma, \beta^\sigma) \cong (C, \beta)\}$ es llamado el *cuerpo de módulos del par de Belyi* (C, β) . Esta definición no depende de la elección de (C, β) y luego esto permite definir, sin ambigüedad, el cuerpo de módulos del par de Belyi (S, β) .

El proceso anterior permite definir de manera natural una acción del grupo absoluto de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sobre el espacio de clases de equivalencia de isomorfía de pares de Belyi de un género dado.

Ejemplo 31 (Curva de Fermat). — Consideremos el par de Belyi (F_k, β) , donde

$$F_k := \{x^k + y^k + z^k = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$$

$$\beta([x : y : z]) = -\left(\frac{y}{x}\right)^k.$$

En este caso, como F_k y β están definidas sobre \mathbb{Q} , tenemos que, la clase del par de Belyi (F_k, β) es un punto fijo para cada $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Teorema 5.7.1. — *La acción del grupo absoluto de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sobre el espacio de clases de equivalencia de isomorfía de pares de Belyi de un género dado es fiel.*

Para el caso de pares de Belyi de género $g = 1$, lo anterior fue observado por Grothendieck. Para $g = 0$, esto fue verificado por Schneps [28]. Para $g \geq 2$, esto fue observado por González-Diez y Gironde (para el caso hiperelíptico) [13]. En el caso no-hiperelíptico esto es observado en [17].

CAPÍTULO 6

UNIFORMIZACIÓN

6.1. Grupos Kleinianos

Otra manera de construir superficies de Riemann es por medio de *grupos Kleinianos*, es decir, subgrupos discretos del grupo $\mathbb{M} \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ de automorfismos holomorfos de la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

Hay una biyección natural entre \mathbb{M} y $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ dada por

$$\Theta : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{M}$$

donde, si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$$

entonces

$$\Theta(A)(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Diremos que un grupo $G < \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ *actúa discontinuamente* sobre el punto $z \in \hat{\mathbb{C}}$ si :

1. el G -estabilizador de z

$$G_z = \{A \in G : A(z) = z\}$$

es finito, y

2. existe una vecindad abierta U de z tal que

$$A(U) \cap U = \emptyset, \quad A \in G - G_z.$$

La *región de discontinuidad* de un grupo $G < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ es el conjunto abierto $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ (el cual puede ser o no vacío) consistiendo de todos los puntos sobre los cuales G actúa discontinuamente.

Teorema 6.1.1. — Si $G < \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ tiene región de discontinuidad no vacía, entonces G es un grupo Kleiniano.

Ejemplo 32 (Grupos Kleinianos con región de discontinuidad vacía)

El grupo $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ es un grupo Kleiniano con región de discontinuidad vacía.

Teorema 6.1.2. — Sea $G < \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ un grupo Kleiniano con región de discontinuidad $\Omega \neq \emptyset$. Sea Δ una colección de componentes conexas de Ω que forma una órbita bajo la acción de G . Si cada punto de Δ tiene G -estabilizador trivial, entonces Δ/G es una superficie de Riemann.

Ejemplo 33 (Grupos abelianos de rango 2). — Sea $G = \langle A(z) = z + 1, B(z) = z + \tau \rangle \cong \mathbb{Z}^2$, donde $\tau \in \mathbb{H}$. La región de discontinuidad de G es \mathbb{C} . Es claro que todo punto de \mathbb{C} es sólo estabilizado por la identidad en G . De esta manera, el teorema anterior nos dice que \mathbb{C}/G es una superficie de Riemann (de género $g = 1$).

Ejemplo 34 (Grupos cíclicos infinitos). — Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \notin \{0, 1\}$. Consideremos $G = \langle A(z) = \lambda z \rangle \cong \mathbb{Z}$. En este caso, la región de discontinuidad de G es $\mathbb{C} - \{0\}$ y cada punto allí tiene G -estabilizador trivial. Se tiene que $(\mathbb{C} - \{0\})/G$ es una superficie de Riemann (de género $g = 1$).

Ejemplo 35 (Grupos cíclicos finitos). — Sea $n \geq 2$ un entero y consideremos $G = \langle A(z) = e^{2\pi i/n} z \rangle \cong \mathbb{Z}_n$. En este caso, la región de discontinuidad de G es $\hat{\mathbb{C}}$ y cada punto en $\mathbb{C} - \{0\}$ tiene G -estabilizador trivial. Se tiene que $(\mathbb{C} - \{0\})/G$ es una superficie de Riemann no compacta isomorfa a $\mathbb{C} - \{0\}$. El cociente $\hat{\mathbb{C}}/G$ es un orbifold de género cero con dos puntos cónicos, ambos de orden n .

Ejemplo 36 (Grupos finitos). — Sea G un grupo finito de \mathbb{M} y no cíclico (luego, dihedral o alternante $\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5$ o simétrico \mathfrak{S}_4). En este caso, la región de discontinuidad de G es $\hat{\mathbb{C}}$. Se tiene que $\hat{\mathbb{C}}/G$ es un orbifold de género cero con tres puntos cónicos.

6.2. Lema de Selberg

Recordemos el siguiente resultado que nos permite asegurar la existencia de ciertos subgrupos de índice finito de grupos finitamente generados de matrices (nuestro caso).

Teorema 6.2.1 (Lema de Selberg). — *Todo subgrupo de matrices que es finitamente generado tiene un subgrupo de índice finito que es normal y sin torsión.*

Una consecuencia bonita del Lema de Selberg es el siguiente. Si G es un grupo infinito de matrices que es finitamente generado, entonces G debe tener un elemento de orden infinito.

6.3. Teoremas de uniformización

Teorema 6.3.1 (Klein, Koebe, Poincaré). — *Toda superficie de Riemann simplemente conexa es isomorfa a una (y sólo una) de las siguientes :*

$$\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{H}.$$

Una consecuencia directa del Teorema de uniformización es el siguiente.

Teorema 6.3.2. — *Sea S una superficie de Riemann. Entonces S es isomorfa a una superficie de Riemann de la forma \tilde{S}/G , donde $\tilde{S} \in \{\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, $G < \text{Aut}^+(\tilde{S})$ es un grupo Kleiniano que actúa discontinuamente en \tilde{S} y el G -estabilizador de cada punto de \tilde{S} es trivial.*

6.3.1. Caso $\tilde{S} = \widehat{\mathbb{C}}$. — Como toda transformación de Möbius actúa con puntos fijos, el único grupo G que satisface las condiciones del Teorema 6.3.2 es el trivial $G = \{I\}$ y en consecuencia S es isomorfa a $\widehat{\mathbb{C}}$.

6.3.2. Caso $\tilde{S} = \mathbb{C}$. — Como

$$\text{Aut}^+(\mathbb{C}) = \{A(z) = az + b; a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$$

y toda transformación del tipo $A(z) = az + b$, con $a \neq 0$, 1 tiene puntos fijos en \mathbb{C} , un grupo G como en el Teorema 6.3.2 debe satisfacer que

$$G < \{T(z) = z + b; b \in \mathbb{C}\}.$$

Por otro lado, la discretitud de G obliga a tener sólo tres posibilidades :

1. $G = \{I\}$.
2. $G = \langle A(z) = z + b \rangle \cong \mathbb{Z}; \quad (b \neq 0)$.
3. $G = \langle A(z) = z + b, B(z) = z + c \rangle \cong \mathbb{Z}^2; \quad (b, c \text{ son } \mathbb{R}\text{-linealmente independientes})$.

En el caso 1., tenemos que S es isomorfa a \mathbb{C} .

En el caso 2., tenemos que S es isomorfa a $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

En el caso 3., tenemos que S es una superficie de Riemann de género 1.

6.3.3. Caso $\tilde{S} = \mathbb{H}$. — De lo anterior, observamos que para toda superficie de Riemann S que no es isomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$ o \mathbb{C} o \mathbb{C}^* o a un toro, se tiene que en el Teorema 6.3.2 vale que $\tilde{S} = \mathbb{H}$. En este caso decimos que S es una superficie de Riemann *hiperbólica*.

6.4. Grupos Fuchsianos

Un *grupo Fuchsiano* es un grupo Kleiniano que deja invariante el semiplano superior

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\},$$

es decir, un subgrupo discreto de $\text{Aut}^+(\mathbb{H})$.

Teorema 6.4.1. — Sea $G < \text{Aut}^+(\mathbb{H})$. Entonces, G es discreto si y sólo si actúa discontinuamente sobre \mathbb{H} .

El resultado anterior nos dice que si G es un grupo Fuchsiano para el cual todo punto de \mathbb{H} tiene G -estabilizador trivial, entonces \mathbb{H}/G es una superficie de Riemann hiperbólica.

En \mathbb{H} podemos considerar la métrica hiperbólica

$$ds = \frac{|dz|}{\text{Im}(z)}.$$

La estructura geométrica (\mathbb{H}, ds) es llamado el *plano hiperbólico*.

Teorema 6.4.2. —

$$\text{Isom}(\mathbb{H}, ds) = \text{Aut}(\mathbb{H})$$

Las líneas rectas en el plano hiperbólico, llamadas *rectas o líneas hiperbólicas*, son de dos tipos (ver Figura 6.1) :

1. semi-rectas euclidianas perpendiculares al borde \mathbb{R} .
2. semi-círculos euclidianos perpendiculares al borde \mathbb{R} .

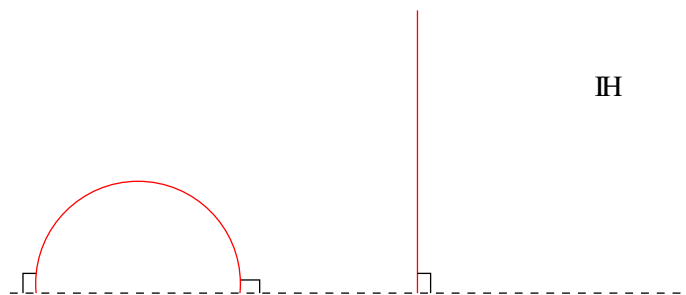


FIGURA 6.1. Rectas hiperbólicas

Una manera de construir grupos Fuchsianos es considerar un polígono geodésico $P \subset \mathbb{H}$ e identificar pares de sus lados usando algunas isometrías (con algunas restricciones técnicas). El grupo G generado por tales isometrías resulta ser un grupo Fuchsiano (el polígono P es un *polígono fundamental para G*). Este hecho es conocido como *teorema del polígono de Poincaré*. En la próxima sección veremos un ejemplo usando triángulos.

6.5. Grupos triangulares

Consideremos un triángulo geodésico $\Delta(a, b, c)$, cuyos ángulos son de la forma

$$\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{c}$$

donde $a, b, c \in \{2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$ y tal que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1.$$

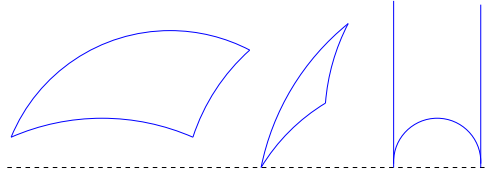


FIGURA 6.2. Triángulos geodésicos

Sea σ_k la reflexión en el lado opuesto al vértice de ángulo π/k , donde $k \in \{a, b, c\}$, y $\widehat{G}(a, b, c)$ el grupo generado por las reflexiones σ_a, σ_b y σ_c . Entonces, $\widehat{G}(a, b, c)$ resulta ser un grupo discontinuo en \mathbb{H} (que contiene isometrías que revierten la orientación), donde el triángulo $\Delta(a, b, c)$ es un polígono fundamental, y tiene una presentación de la forma :

$$\widehat{G}(a, b, c) = \langle \sigma_a, \sigma_b, \sigma_c : \sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \sigma_c^2 = (\sigma_c \sigma_a)^b = (\sigma_b \sigma_a)^c = (\sigma_c \sigma_b)^a = 1 \rangle.$$

Sea $G(a, b, c)$ el subgrupo de índice 2 de $\widehat{G}(a, b, c)$ que consiste de aquellas isometrías que preservan la orientación. Así, $G(a, b, c)$ es un grupo Fuchsiano y, si tomamos

$$\gamma_1 = \sigma_c \sigma_b, \quad \gamma_2 = \sigma_a \sigma_c,$$

entonces

$$G(a, b, c) = \langle \gamma_1, \gamma_2 : \gamma_1^a = \gamma_2^b = (\gamma_2 \gamma_1)^c = 1 \rangle.$$

Un polígono fundamental para $G(a, b, c)$ es dado por la unión de $\Delta(a, b, c) \cup \sigma_c(\Delta(a, b, c))$ (Ver Figura 6.3).

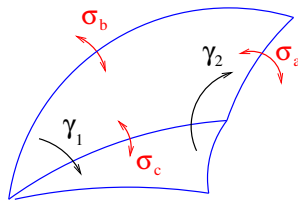


FIGURA 6.3. Polígono fundamental para $G(a, b, c)$

El espacio cociente $\mathbb{H}/\widehat{G}(a, b, c)$ es una copia de $\Delta(a, b, c)$ y el espacio cociente $\mathcal{O}(a, b, c) = \mathbb{H}/G(a, b, c)$ es una esfera con tres puntos cónicos,

de ordenes a , b y c (un punto cónico de orden ∞ es una pinchadura, es decir, no está presente). Este cociente $\mathcal{O}(a, b, c)$ es llamada una *orbifold de Riemann de signatura* $(0; a, b, c)$. Este orbifold tiene como superficie de Riemann subyacente la dada por la esfera de Riemann menos aquellos puntos cónicos con orden ∞ .

6.5.1. $\Gamma(2)$: el caso $(a, b, c) = (\infty, \infty, \infty)$. — Como caso particular, supongamos $a = b = c = \infty$. En este caso, podemos poner como $\Delta(\infty, \infty, \infty)$ al triángulo geodésico cuyos vértices son 0, 1 y ∞ (ver Figura 6.4).

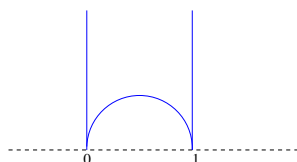


FIGURA 6.4. $\Delta(\infty, \infty, \infty)$

En este caso

$$G(\infty, \infty, \infty) = \Gamma(2) = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z},$$

$$\gamma_1(z) = z + 2, \quad \gamma_2(z) = \frac{z}{1 - 2z},$$

$$\mathcal{O}(\infty, \infty, \infty) = \mathbb{C} - \{0, 1\}.$$

6.6. Grupos triangulares y curvas de Belyi

Consideremos un subgrupo K , de índice finito, de un grupo triangular $G(a, b, c)$, donde $a, b, c \in \{2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$ y

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1.$$

Si K no tiene torsión, entonces $S = \mathbb{H}/K$ resulta ser una superficie de Riemann (compacta si y sólo si $a, b, c \in \{2, 3, \dots\}$). En el caso que alguno de los valores a, b, c sea ∞ , S resulta ser el complemento de un número finito de puntos de una superficie de Riemann compacta (la cual es única módulo isomorfismos).

Para lo que sigue, sólo necesitamos asumir que K tiene índice finito N en $G(a, b, c)$ (pero K puede tener torsión). La orbifold de Riemann \mathbb{H}/K

tiene una estructura natural de superficie de Riemann (compacta si ninguno de los valores a , b o c es igual a ∞). En este caso, tenemos una función meromorfa no-constante natural (de grado N)

$$\beta : \mathbb{H}/K \rightarrow \mathbb{H}/G(a, b, c) \subset \widehat{\mathbb{C}},$$

la cual resulta ser, por la construcción, una función de Belyi (considerando la superficies de Riemann compacta asociada).

Por ejemplo, al considerar $\Gamma(2) = G(\infty, \infty, \infty)$ en lo anterior (luego K no tiene torsión), tenemos que \mathbb{H}/K es el complemento de una colección finita de puntos de una superficie de Riemann S , la cual resulta ser una curva de Belyi.

Ahora, supongamos que tenemos un par de Belyi (S, β) . Sea $S^0 = S - \beta^{-1}(\{\infty, 0, 1\})$ y consideremos la función holomorfa (no-ramificada) $\beta^0 : S^0 \rightarrow \mathbb{C} - \{0, 1\}$. Por el teorema de uniformización, existe un subgrupo K of $\Gamma(2)$ (de índice igual al grado de β) tal que, módulo isomorfismos, $S^0 = \mathbb{H}/K$ y β es inducido por la inclusión de K en $\Gamma(2)$.

Todos los argumentos anteriores permiten obtener los siguientes teoremas ; mayores detalles pueden encontrarse, por ejemplo, en [20].

Teorema 6.6.1. — *Existe una biyección natural entre las clases de equivalencia de los pares de Belyi y las clases de conjugación de los subgrupos de índice finito de $\Gamma(2)$.*

Más aún, si (S, β) is un par de Belyi y

$$a = \text{lcm}\{\deg(v) : v \in S, \beta(v) = 0\}$$

$$b = \text{lcm}\{\deg(v) : v \in S, \beta(v) = 1\}$$

$$c = \text{lcm}\{\deg(v) : v \in S, \beta(v) = \infty\}$$

satisfacen que $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} < 1$, entonces existe un subgrupo K del grupo triangular Fuchsiano $G(a, b, c)$ (de índice igual al grado de β) tal que la estructura de superficie de Riemann del orbifold \mathbb{H}/K es (isomorfa a) S y β es equivalente a la proyección natural dada por la inclusión de K en $G(a, b, c)$.

La situación anterior es similar si reemplazamos \mathbb{H} por $\widehat{\mathbb{C}}$ (respectivamente, \mathbb{C}) si $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} > 1$ (respectivamente, $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 1$).

Teorema 6.6.2. — *Existe una biyección natural entre las clases de equivalencia de los pares de Belyi, con a , b y c como antes, y las clases de conjugación de los subgrupos de índice finito de $G(a, b, c)$.*

CAPÍTULO 7

DESSINS D'ENFANTS

7.1. Dessins d'enfants

Un *dessin d'enfant* de género g es un par (X, D) , donde X es una superficie compacta orientable de género g y $D \subset X$ es un grafo bipartito (vértices están coloreados en blanco y negro y vértices adyacente tienen coloración diferente) tal que cada componente conexa de $X - D$ (llamada una *cara*) es un disco topológico (un polígono).

Si α es el número de vértices negros, β es el número de vértices blancos, e es el número de ejes y γ el número de caras, entonces la fórmula de Euler dice que

$$2 - 2g = \alpha + \beta + \gamma - e.$$

7.2. La signatura de un dessin d'enfant

Si (X, D) es un dessin d'enfant de género g , entonces cada vértice tiene asociado un grado (como vértice de un grafo) y cada cara tiene asociado un grado : la mitad de ejes que hay en su frontera (ejes interiores son contados dos veces).

La *signatura o tipo del dessin d'enfant* (X, D) es la tupla $(g; r, s, t)$, donde g es el género de X , r es el mínimo común múltiplo de los grados de los vértices negros, s es el mínimo común múltiplo de los grados de los vértices blancos y t es el mínimo común múltiplo de los grados de las caras.

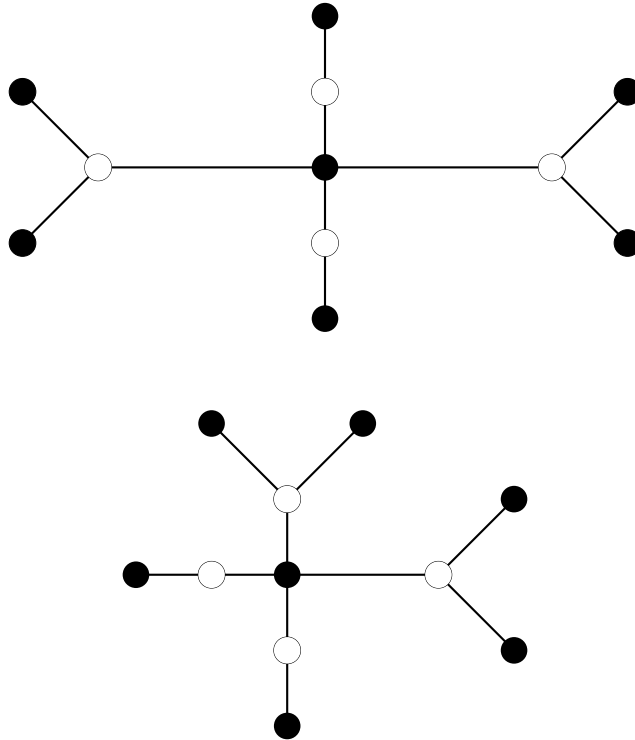


FIGURA 7.1. Un par de dessins d'enfants de género $g = 0$

Ejemplo 37. — Ambos dessins d'enfants en la Figura 7.1 tienen signatura $(0; 4, 6, 10)$. Observe que no existe ningún homeomorfismo (que preserve o revierta la orientación) que lleve el grafo de la izquierda al de la derecha.

7.3. Dessin d'enfant limpio

Un dessin d'enfant con signatura de la forma $(g; r, 2, t)$ es llamado *limpio* (*clean*).

Ejemplo 38. — Dado un mapa $M \subset X$ sobre una superficie compacta orientable, podemos pintar sus vértices con color negro. En cada eje escogemos un punto en el interior, el cual pintamos de blanco. De esta manera construimos un dessin d'enfant limpio.

7.4. Valencia de un dessin d'enfant

Otra tupla que podemos asociar a un dessin d'enfant (X, D) de género g es la *valencia*

$$\text{Val}(X, D) = (a_1, \dots, a_\alpha; b_1, \dots, b_\beta; c_1, \dots, c_\gamma),$$

donde

1. α es el número de vértices negros ;
2. β es el número de vértices blancos ;
3. γ es el número de caras ;
4. $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_\alpha$ son los grados de los vértices negros ;
5. $1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_\beta$ son los grados de los vértices blancos ;
6. $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_\gamma$ son los grados de las caras.

Es claro que debemos tener las identidades :

$$a_1 + \dots + a_\alpha = b_1 + \dots + b_\beta = c_1 + \dots + c_\gamma = e$$

y, en particular, por la fórmula de Euler,

$$2 - 2g = \alpha + \beta + \gamma - (a_1 + \dots + a_\alpha).$$

Ejemplo 39. — Los dos dessins d'enfants mostrados en la Figura 7.1 tienen la misma valencia :

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 4; 2, 2, 3, 3; 10).$$

7.5. Cubrimientos ramificados asociados a un dessin d'enfant

Consideremos un dessin d'enfant (X, D) y por cada cara escojamos un punto interior (los cuales pintaremos de color rojo). Una vez hecha tal elección, podemos construir una función continua sobreyectiva $Q : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, de grado igual al número de ejes, que envía los vértices negros a 0, los vértices blancos a 1, los puntos rojos a ∞ , los ejes al intervalo $(0, 1)$, de manera que Q , restringida al complemento de los vértices negros, blancos y puntos rojos, resulta ser un cubrimiento. Decimos que Q es un *cubrimiento ramificado asociado al dessin d'enfant* (X, D) .

El cubrimiento ramificado asociado al dessin d'enfant (X, D) no es único, pero dos de ellos son homotópicos relativo los vértices del grafo.

7.6. Equivalencia de dessins d'enfants

Diremos que dos dessins d'enfants (X_1, D_1) y (X_2, D_2) son *isomorfos* si existe un homeomorfismo que preserva la orientación $h : X_1 \rightarrow X_2$ de manera que h induce un isomorfismo entre los grafos D_1 and D_2 que envía vértices negros a vértices negros y vértices blancos a vértices blancos. Decimos que tal homeomorfismo h es un *isomorfismo* entre los dessins d'enfants.

Observemos que si $Q_1 : X_1 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es un cubrimiento ramificado asociado a (X_1, D_1) , entonces $Q_2 = Q_1 \circ h^{-1} : X_2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es cubrimiento ramificado asociado a (X_2, D_2) .

Observación 7.6.1. — Dessins d'enfants isomorfos siempre tienen la misma signatura y la misma valencia. Pero, como lo muestran los dos dessins d'enfants mostrados en la Figura 7.1, que no son isomorfos, tienen la misma signatura y valencia.

7.7. Automorfismos de dessins d'enfants

7.7.1. Un *automorfismo* del dessin d'enfant (X, D) es un homeomorfismo (que puede revertir o no la orientación) $h : X \rightarrow X$ de manera que h induce un automorfismo del grafo D preservando el color de los vértices.

Notemos que un automorfismo que preserva la orientación es un isomorfismo de (X, D) consigo mismo.

7.7.2. Denotaremos por $\text{Aut}(X, D)$ al grupo de automorfismos of (X, D) y por $\text{Aut}^+(X, D)$ su subgrupo de automorfismos que preservan la orientación. Se tiene que esos grupos son iguales o bien $\text{Aut}^+(X, D)$ tiene índice 2 en $\text{Aut}(X, D)$.

Ejemplo 40. — El dessin d'enfant (X, D) , donde X es la esfera y D es el grafo bipartito mostrado en el Ejemplo 30, tiene $\text{Aut}(X, D) \cong \mathfrak{S}_3$ y $\text{Aut}^+(X, D) \cong \mathbb{Z}_3$.

Ejemplo 41. — Los dessins d'enfants mostrados en la Figura 7.1 tienen grupos de automorfismos diferentes. Por ejemplo, el que aparece en la izquierda admite un automorfismo de orden 2 que preserva la orientación (dado por una rotación en 180° en el vértice negro central) y también un automorfismo de orden 2 que revierte la orientación (dado por reflexión en cualquiera de las dos rectas que pasan por el vértice negro central y contiene ejes). Este grupo de automorfismos es isomorfo a \mathbb{Z}_2^2 . El dessin d'enfant de la derecha sólo tiene un automorfismo de orden 2 que revierte la orientación (dado al reflejar de una recta diagonal que pasa por el vértice negro central). Su grupo de automorfismos es isomorfo a \mathbb{Z}_2 .

7.7.3. Si $Q_1, Q_2 : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ son cubrimientos ramificados asociados al dessin d'enfant (X, D) , entonces existe un automorfismo $h \in \text{Aut}(X, D)$ tal que $Q_2 = Q_1 \circ h$ y h homotópico a la identidad relativo a los vértices de D .

7.7.4. Observemos, por la definición, que un dessin d'enfant tiene infinitos automorfismos; podemos modificar cada uno de ellos de manera homotópica (relativa los vértices) al interior de caras.

Ahora procederemos a construir grupos finitos. Para esto, procedemos a fijar un cubrimiento ramificado asociado al dessin d'enfant (X, D) , digamos $Q : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$.

Si $h \in \text{Aut}^+(X, D)$ (respectivamente, si $h \in \text{Aut}(X, D) - \text{Aut}^+(X, D)$), entonces (salvo una deformación homotópica de h relativa los vértices de D), podemos asumir que $Q \circ h = Q$ (respectivamente, $Q \circ h = J \circ Q$, donde $J(z) = \bar{z}$). Esto determina de manera única esta deformación h . Definimos

$$\text{Aut}^+(X, D, Q) = \{h \in \text{Aut}^+(X, D) : Q \circ h = Q\}$$

y $\text{Aut}(X, D, Q)$ por

$$\text{Aut}(X, D, Q) - \text{Aut}^+(X, D, Q) = \{h \in \text{Aut}(X, D) - \text{Aut}^+(X, D) : J \circ Q \circ h = Q\}$$

Estos nuevos grupos de automorfismos son grupos finitos.

Proposición 7.7.1. — Si Q_1 y Q_2 son cubrimientos ramificados asociados al mismo dessin d'enfant, entonces existe un isomorfismo

$\theta : \text{Aut}(X, D, Q_1) \rightarrow \text{Aut}(X, D, Q_2)$ de manera que este restringe a un isomorfismo $\theta : \text{Aut}^+(X, D, Q_1) \rightarrow \text{Aut}^+(X, D, Q_2)$.

Demonstración. — Observemos que hay un homeomorfismo que preserva la orientación $h : X \rightarrow X$ tal que $Q_2 = Q_1 \circ h$ (además h es homotópico a la identidad relativo los vértices de D).

□

7.8. Dessins d'enfants y pares de Belyi

7.8.1. Asociando pares de Belyi a un dessin d'enfant. — Sea (X, D) un dessin d'enfant y sea $Q : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ un cubrimiento ramificado asociado a éste.

Podemos levantar la estructura de superficie de Riemann de $\widehat{\mathbb{C}}$ por Q para así obtener una estructura de superficie de Riemann S en X de manera que $Q : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es meromorfa. De esta manera, hemos obtenido un par de Belyi (S, Q) , donde D se obtiene como preimágen por Q del intervalo $[0, 1]$ (las preimágenes de 0 son los vértices negros y las preimágenes de 1 son los vértices blancos).

Sabemos que Q no es único y la estructura de superficie de Riemann S construida depende de Q . Pero sabemos que Q es único módulo homotopía relativo los vértices de D . Luego, las estructuras de superficies de Riemann son isomorfas (el biholomorfismo es dado por un homeomorfismo $U : X \rightarrow X$ que preserva la orientación y que es homotópico a la identidad relativo a los vértices de D).

Supongamos que (X_1, D_1) y (X_2, D_2) son dessins d'enfants isomorfos, $Q_1 : X_1 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ y $Q_2 : X_2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ son cubrimientos ramificados asociados. Al proceder como arriba, para estos dos dessins d'enfants, obtenemos estructuras de superficies de Riemann S_1 y S_2 inducidas por Q_1 and Q_2 , respectivamente, sobre X_1 y X_2 . Como los dessins d'enfants son isomorfos, existe un homeomorfismo que preserva la orientación $h : X_1 \rightarrow X_2$ tal que $Q_2 \circ h = Q_1$. Entonces $h : S_1 \rightarrow S_2$ es biholomorfismo y obtenemos que los pares de Belyi (S_1, Q_1) y (S_2, Q_2) son isomorfos.

7.8.2. Asociando un dessin d'enfant a un par de Belyi. — Si partimos con un par de Belyi (S, β) , entonces tenemos determinado un dessin d'enfant (X, D) , donde X es la superficie topológica de S y D es $\beta^{-1}([0, 1])$

(las preimágenes de 0 son los vértices negros y las preimágenes de 1 son los vértices blancos).

Es claro que si partimos de dos pares de Belyi isomorfos, entonces los correspondientes dessins d'enfants son isomorfos.

Ejemplo 42. — El par de Belyi $(\widehat{\mathbb{C}}, \beta(z) = z^3)$ determina el dessin d'enfant mostrado en la Figura 7.2.

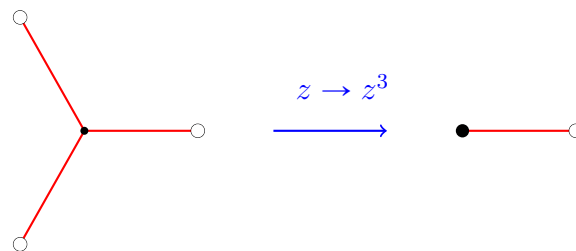


FIGURA 7.2. Dessin d'enfant para $(\widehat{\mathbb{C}}, \beta(z) = z^3)$

Ejemplo 43. — El par de Belyi $(\widehat{\mathbb{C}}, \beta(z) = 4z^3(1 - z^3))$ determina el dessin d'enfant mostrado en la Figura 7.3.

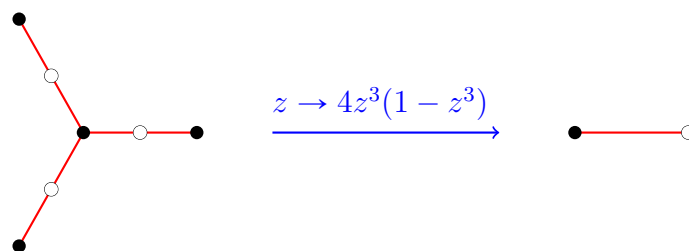


FIGURA 7.3. Dessin d'enfant para $(\widehat{\mathbb{C}}, \beta(z) = 4z^3(1 - z^3))$

Observación 7.8.1. — 1. Dado un par de Belyi (S, β) podríamos haber construido otros dessins d'enfants tomando las preimágenes de $[1, +\infty]$ o $[-\infty, 0]$. Estos dos nuevos dessins d'enfants corresponden al dessin d'enfant asociado a los pares de Belyi $(S, 1/(1 - \beta))$ y $(S, (\beta - 1)/\beta)$ usando $[0, 1]$.

2. Otro dessin d'enfant que podemos construir a partir de (S, β) es usando $(S, 4\beta(1 - \beta))$. Esto corresponde a tomar el dessin d'enfant asociado a (S, β) y pintar todos sus vértices del mismo color negro (es decir, los que antes eran blancos ahora pasan a ser negros) y tomar de cada eje un punto medio el cual pintamos como vértice blanco.
3. Otro dessin d'enfant es usar el par de Belyi $(S, 4\beta/(\beta + 1)^2)$. Esto corresponde a agregar los puntos medios de caras (los polos de β) como vértices negros y agregar ejes de estos nuevos vértices a los vértices blancos que viven en el borde de la cara que les contiene.

7.8.3. Equivalencia entre pares de Belyi y dessins d'enfants. — Lo anterior nos da el siguiente resultado.

Teorema 7.8.2. — *El proceso descrito anteriormente define una equivalencia entre clases de isomorfía de pares de Belyi y clases de isomorfía de dessins d'enfants. En particular, hay una equivalencia entre clases de isomorfía de dessins d'enfants y clases de conjugación de subgrupos de índice finito de $\Gamma(2)$.*

7.9. Acción del grupo absoluto de Galois en dessins d'enfants

El Teorema 7.8.2 nos da una equivalencia entre clases de equivalencia de dessins d'enfants y clases de equivalencia de pares de Belyi. Vimos, por el Teorema de Belyi, que tenemos una acción natural (fiel) del grupo absoluto de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sobre los pares de Belyi; luego, tenemos una acción fiel sobre los dessins d'enfants. Grothendieck usó esta idea para poder estudiar la estructura de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ desde un punto de vista combinatorio (esto es lo que son los dessins d'enfants).

Dado un dessin d'enfant (X, D) y $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, denotemos por el símbolo $(X, D)^\sigma$ al dessin d'enfant (la clase) obtenido por la acción antes descrita del grupo absoluto de Galois.

Preguntas naturales son, por ejemplo :

1. ¿Cómo saber si dos dessins d'enfants son equivalentes por la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$?

2. ¿Cómo determinar $(X, D)^\sigma$ en términos de σ y (X, D) ?

Algunos invariantes bajo la acción del grupo $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ son las siguientes.

1. (X, D) y $(X, D)^\sigma$ tienen la misma cantidad de vértices negros, de vértices blancos y caras y sus respectivos grados.
2. (X, D) y $(X, D)^\sigma$ tienen la misma signatura y valencia.
3. $\text{Aut}(X, D) = \text{Aut}((X, D)^\sigma)$.

7.10. El grupo de monodromía de un dessin d'enfant

Consideremos un dessin d'enfant (X, D) de género g , con e ejes, n_0 vértices negros, n_1 vértices blancos y f caras.

Consideremos un cubrimiento ramificado $Q : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ asociado a (X, D) . Ahora podemos mirar el grupo de monodromía asociado a Q , un subgrupo transitivo del grupo de permutaciones \mathfrak{S}_e generado por dos elementos. Observemos que cambiar Q por otro cubrimiento ramificado asociado a (X, D) no cambia la clase de conjugación en \mathfrak{S}_e del grupo de monodromía. Este grupo de monodromía (su clase de conjugación) se puede construir como sigue.

Enumeremos los ejes de D con números en $\{1, 2, \dots, e\}$, de manera que ejes diferentes tienen diferente enumeración (ver Figura 7.4).

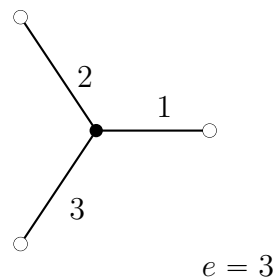


FIGURA 7.4. Una enumeración de ejes de D

A cada vértice negro le asociamos un ciclo, de longitud igual a su grado, usando las enumeraciones de los ejes adyacentes a tal vértice siguiendo la

orientación positiva en X . Por ejemplo, en la Figura 7.4 sólo tenemos un vértice negro y tiene como ciclo asociado a $(1, 2, 3) \in \mathfrak{S}_3$.

Con el proceso anterior, obtenemos n_0 ciclos disjuntos, uno por cada vértice negro y de longitud igual al grado de éste. Definimos la permutación $\sigma \in \mathfrak{S}_e$ siendo el producto de todos tales ciclos.

Podemos ahora proceder de la misma manera para los vértices blancos para obtener una permutación $\tau \in \mathfrak{S}_e$, siendo el producto de n_1 ciclos disjuntos.

El grupo $G(X, D) = \langle \sigma, \tau \rangle < \mathfrak{S}_e$ es llamado el *grupo de monodromía* de (X, D) .

Ejemplo 44. — En el dessin d'enfant de la Figura 7.4 tenemos que

$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 2, 3), \quad \tau = (1)(2)(3) \\ G(\hat{\mathbb{C}}, D) &= \langle (1, 2, 3) \rangle \cong \mathbb{Z}_3.\end{aligned}$$

Otra enumeración de los ejes de D determina una permutación $\eta \in \mathfrak{S}_e$ de manera que, si $\hat{\sigma}$ y $\hat{\tau}$ son las permutaciones obtenidas con esta nueva enumeración, entonces $\hat{\sigma} = \eta\sigma\eta^{-1}$ y $\hat{\tau} = \eta\tau\eta^{-1}$. Este hecho lo resumimos en la siguiente.

Proposición 7.10.1. — *Otra enumeración de los lados de D determina una permutación $\eta \in \mathfrak{S}_e$ de manera que $\eta\sigma\eta^{-1}$ y $\eta\tau\eta^{-1}$ son las permutaciones correspondientes a los vértices negros y blancos, de manera respectiva. En otras palabras, el grupo de monodromía se determina, módulo conjugación, por el dessin d'enfant.*

Proposición 7.10.2. — *El grupo de monodromía es un subgrupo transitivo de \mathfrak{S}_e generado por dos elementos.*

Demonstración. — Ya sabemos que el grupo de monodromía es generado por σ y τ (una vez que hemos fijado una enumeración de los ejes de D).

La conectividad del grafo D nos asegura que dados dos ejes diferentes, digamos e_1 y e_2 de D , entonces existe una colección finita de ejes, digamos q_1, \dots, q_n , de manera que $q_1 = e_1$, $q_n = e_2$ y los ejes q_{j-1} y q_j tienen un vértice en común. Ahora, por la definición, podemos usar una potencia

de σ o τ (dependiendo del color del vértice común entre q_{j-1} y q_j) que envía la enumeración de q_{j-1} a la enumeración del eje q_j . Luego, podemos construir una permutación en $G(X, D)$ que lleva la enumeración del eje e_1 en la de e_2 (ver Figura 7.5).

□

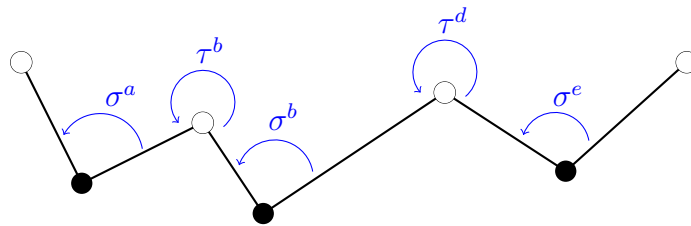


FIGURA 7.5. a, b, c, d, e enteros apropiados

Proposición 7.10.3. — La permutación $\tau\sigma$ (usaremos la multiplicación de izquierda a derecha) es producto de f ciclos disjuntos, cada ciclo corresponde a cada cara de (X, D) y la longitud de un ciclo es igual al grado de la cara correspondiente y los números apareciendo en este ciclo son los números dados a los lados de la cara yendo desde un vértice negro a uno blanco en la orientación negativa de la cara.

Ejemplo 45. — Consideremos el dessin d'enfant de género cero mostrado en la Figura 7.6. Con la enumeración mostrada, tenemos que

$$\sigma = (1, 2, 5)(3, 4), \quad \tau = (1)(2, 3)(4, 5)$$

$$\tau\sigma = (1, 2, 4)(3, 5).$$

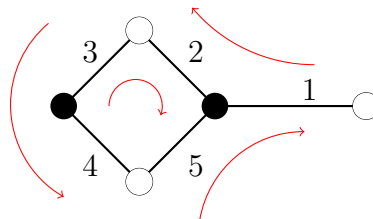


FIGURA 7.6. Un dessin d'enfant de género $g = 0$

Observación 7.10.4. — Las ideas anteriores de usar permutaciones parecen haber sido ya utilizadas por Hamilton en lo que ahora llamamos ciclos Hamiltonianos.

Observemos que el orden de σ (respectivamente, de τ y $\tau\sigma$) es el mínimo común múltiplo de las longitudes de sus ciclos (disjuntos). Luego, obtenemos la siguiente.

Proposición 7.10.5. — Sea $G = \langle \sigma, \tau \rangle$ grupo de monodromía del dessin d'enfant (X, D) de género g . Entonces el orden $|\sigma|$ de σ , el orden $|\tau|$ de τ y el orden de $|\tau\sigma|$ de $\tau\sigma$ son, respectivamente,

$$|\sigma| = \text{lcm}\{\deg(v) : v \text{ vértice negro}\}$$

$$|\tau| = \text{lcm}\{\deg(v) : v \text{ vértice blanco}\}$$

$$|\tau\sigma| = \text{lcm}\{\deg(f) : f \text{ cara}\}$$

La signatura de (X, D) es $(g; |\sigma|, |\tau|, |\tau\sigma|)$ y

$$2 - 2g = l(\sigma) + l(\tau) - e + l(\tau\sigma)$$

donde e es el número de ejes y, para una permutación η en número $l(\eta)$ denota el número de ciclos disjuntos que tiene η .

Observación 7.10.6. — Como el grupo de monodromía $G = \langle \sigma, \tau \rangle < \mathfrak{S}_e$ actúa de manera transitiva en el conjunto $\{1, \dots, e\}$, tenemos una biyección natural entre $\{1, 2, \dots, e\}$ y las clases $G_1 \backslash G$, donde G_1 es el G -estabilizador de 1. La acción de G sobre los ejes es equivalente a la acción

$$G \times G_1 \backslash G \rightarrow G_1 \backslash G$$

$$(\eta, G_1\rho) \mapsto G_1\rho\eta.$$

Observación 7.10.7. — Los grupos de monodromía de los dessins d'enfants son subgrupos transitivos generados por dos elementos del grupo de permutaciones \mathfrak{S}_e . En general, tales subgrupos son \mathcal{A}_e (su subgrupo alterante) y \mathfrak{S}_e . Hay casos, donde hay más de tales subgrupos. Los próximos tres ejemplos son de este tipo.

Ejemplo 46. — Consideremos el dessin d'enfant mostrado en la Figura 7.7 y la enumeración de ejes allí mostrada. En este caso

$$\sigma = (1, 2, 3)(4, 6, 5)(7)(8)$$

$$\tau = (1, 2)(3, 4)(5, 7)(6, 8)$$

$$\tau\sigma = (1, 3, 6, 8, 5, 7, 4)(2)$$

Usando el programa computacional GAP podemos verificar que

$$\langle \sigma, \tau \rangle \cong \text{PSL}(3, 2) \cong \text{PSL}(2, 7) \quad (\text{grupo simple de orden } 168).$$

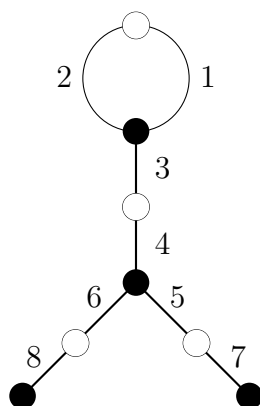


FIGURA 7.7. Un dessin d'enfant de género $g = 0$

Ejemplo 47. — Consideremos el dessin d'enfant mostrado en la Figura 7.8 y la enumeración de ejes allí mostrada. En este caso

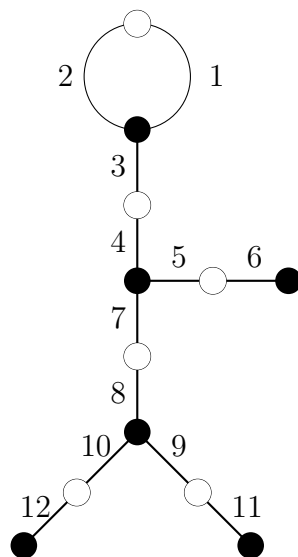
$$\sigma = (1, 2, 3)(4, 7, 5)(6)(9, 8, 10)(11)(12)$$

$$\tau = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 11)(10, 12)$$

$$\tau\sigma = (1, 3, 7, 10, 12, 9, 11, 8, 5, 6, 4)(2)$$

Usando el programa computacional GAP podemos verificar que

$$\langle \sigma, \tau \rangle \cong M_{12} \quad (\text{Grupo de Mathieu de orden } 95040).$$

FIGURA 7.8. Un dessin d'enfant de género $g = 0$

Ejemplo 48. — Consideremos el dessin d'enfant mostrado en la Figura 7.9 y la enumeración de ejes allí mostrada. En este caso

$$\sigma = (1)(2, 5, 8)(3)(4, 7, 6)(9, 10, 11)(12, 14, 13)(15)(16, 18, 17)(20)(21, 19, 22)(23)(24)$$

$$\tau = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 10)(8, 9)(11, 12)(13, 15)(14, 16)(17, 19)(18, 20)(21, 23)(22, 24)$$

$$\tau\sigma = (1, 5, 4, 3, 7, 11, 14, 18, 20, 17, 22, 24, 21, 23, 19, 16, 13, 15, 12, 9, 2)(6, 8, 10)$$

Usando el programa computacional GAP podemos verificar que

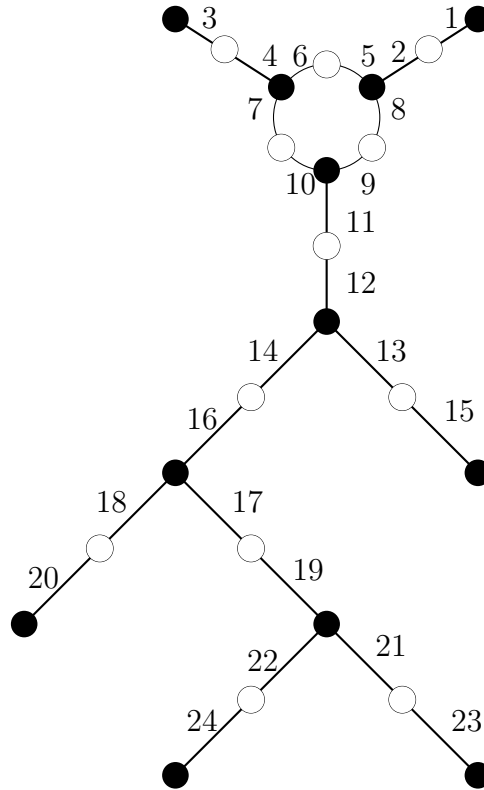
$$\langle \sigma, \tau \rangle \cong M_{24} \quad (\text{Grupo de Mathieu de orden } 244823040).$$

El siguiente resultado nos asegura que la clase de isomorfía de un dessin d'enfant es determinado por su (clase de conjugación) grupo de monodromía.

Teorema 7.10.8. — Sean $\langle \sigma_1, \tau_1 \rangle$ y $\langle \sigma_2, \tau_2 \rangle$ grupos de monodromía de dessins d'enfants (X_1, D_1) y (X_2, D_2) , respectivamente. Entonces, los siguientes son equivalentes.

1. (X_1, D_1) y (X_2, D_2) son isomorfos.
2. Existe una permutación $\eta \in \mathfrak{S}_e$ (donde e es el número de ejes) tal que

$$\sigma_2 = \eta\sigma_1\eta^{-1}, \quad \tau_2 = \eta\tau_1\eta^{-1}.$$

FIGURA 7.9. Un dessin d'enfant de género $g = 0$

Demonstración. — Veamos que (1) implica (2). Consideremos un homeomorfismo que preserva la orientación $h : X_1 \rightarrow X_2$ y que induce un isomorfismo entre los dos dessins d'enfant dados. Ahora, dada una enumeración de los lados de D_1 (la que nos da lugar la monodromía $\langle \sigma_1, \tau_1 \rangle$ para (X_1, D_1)), podemos transportarla por h para obtener una enumeración de los lados de D_2 . Con esta enumeración obtenemos el mismo grupo de monodromía anterior. Ya hemos visto que con otra enumeración de los lados de D_2 obtenemos una permutación η de manera que la monodromía con la nueva enumeración es de la forma $\langle \sigma_2 = \eta\sigma_1\eta^{-1}, \tau_2 = \eta\tau_1\eta^{-1} \rangle$.

Ahora veamos que (2) implica (1). En realidad, veremos un hecho más fuerte que el que necesitamos ; que todo subgrupo transitivo generado por dos elementos es el grupo de monodromía de un dessin d'enfant. Para esto, partamos con un tal grupo transitivo $G = \langle \sigma, \tau \rangle < \mathfrak{S}_e$.

Por cada ciclo $(\tau\sigma)_j$ de $\tau\sigma$ construimos un polígono P_j con tantos lados como el doble de la longitud del ciclo correspondiente. Enumeramos los lados de P_j de manera cíclica (siguiendo la orientación negativa del

polígono) en forma alternada usando los números en tal ciclo. Los vértices de P_j son coloreados con blanco y negro, alternadamente, de manera de cada vértice negro está al comienzo de cada lado enumerado (siguiendo la orientación negativa). Ahora, usando σ , podemos enumerar los siguientes lados de P_j .

Procedemos a identificar todos estos polígonos por sus lados de igual enumeración para obtener el dessin d'enfant deseado. □

En el siguiente ejemplo indicamos la construcción hecha en la segunda parte de la demostración anterior.

Ejemplo 49. — Sea $\langle \sigma = (1, 2, 5)(3, 4), \tau = (1)(2, 3)(4, 5) \rangle = \mathfrak{S}_5$. En este caso,

$$\tau\sigma = (1, 2, 4)(3, 5),$$

luego debemos considerar dos polígonos, P_1 y P_2 , donde P_1 tiene 6 lados y P_2 tiene 4 lados (ver parte superior de la Figura 7.10). Ahora, en azul están las enumeraciones que damos a cada uno de los lados de los polígonos usando los ciclos de $\tau\sigma$. En rojo están aquellos que nos obliga σ . Notemos que hay dos lados consecutivos del polígono de 6 lados con el mismo número 1; esto dice que tendremos un lado interior. Usando el hecho que $2 - 2g = 5 - 5 + 2 = 2$, obtenemos que el dessin d'enfant es de género cero mostrado en la parte inferior de la Figura 7.10.

Una consecuencia directa del teorema anterior es el siguiente (parte de lo cual ya habíamos visto).

Teorema 7.10.9. — *Existe una equivalencia natural entre las siguientes.*

1. *Clases de isomorfía de dessins d'enfants.*
2. *Clases de isomorfía de pares de Belyi.*
3. *Clases de conjugación de subgrupos transitivos con dos generadores de grupos de permutaciones.*
4. *Clases de conjugación de subgrupos de índice finito de $\Gamma(2)$.*

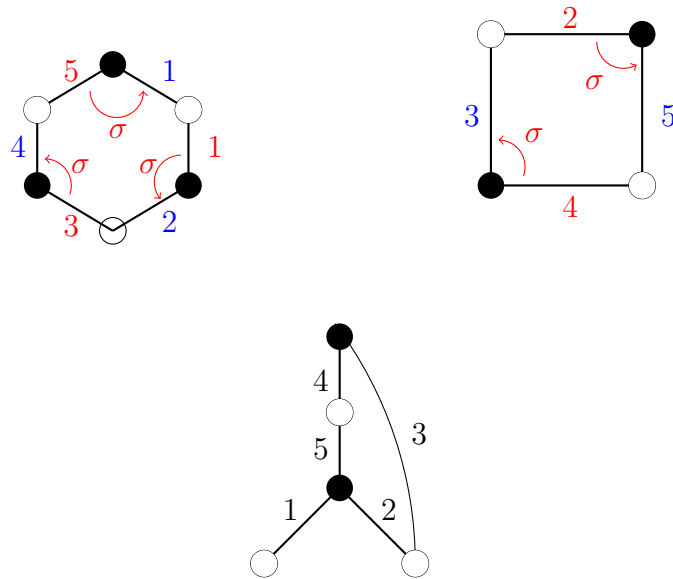


FIGURA 7.10. Los dos polígonos y sus lados

7.11. El grupo de automorfismos de un dessin d'enfant por medio de permutaciones

Consideremos un dessin d'enfant (X, D) y su grupo de automorfismos $\text{Aut}(X, D)$.

Hemos ya observado que el grupo $\text{Aut}(X, D)$ es un grupo infinito (pues estamos dejando libre deformaciones homotópicas). Pero esto lo podemos arreglar escogiendo un cubrimiento ramificado asociado $Q : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ y considerar el subgrupo finito $\text{Aut}(X, D, Q)$.

Hagamos una enumeración de los e ejes de D y construyamos su grupo de monodromía $G = \langle \sigma, \tau \rangle < \mathfrak{S}_e$.

Si $f \in \text{Aut}^+(X, D)$, entonces (como f preserva la orientación y envía vértices negros en vértices negros), f define una permutación $\theta(f) \in \mathfrak{S}_e$ tal que

$$\theta(f)\sigma = \sigma\theta(f), \quad \theta(f)\tau = \tau\theta(f),$$

es decir, $\theta(f) \in \mathcal{Z}(G)$ (centralizador de G en \mathfrak{S}_e). De manera recíproca, si tenemos $\eta \in \mathcal{Z}(G)$, entonces (procediendo de manera similar como hemos visto como reconstruir el dessin d'enfant a partir de G) se puede construir $f \in \text{Aut}^+(X, D)$ de manera que $\theta(f) = \eta$.

Si $f \in \text{Aut}(X, D) - \text{Aut}^+(X, D)$, entonces (como f revierte la orientación y envía vértices negros en vértices negros) f define una permutación $\theta(f) \in \mathfrak{S}_e$ tal que

$$\theta(f)\sigma = \sigma^{-1}\theta(f), \quad \theta(f)\tau^{-1} = \tau\theta(f).$$

De manera recíproca, si tenemos $\eta \in \mathfrak{S}_e$ tal que

$$\eta\sigma = \sigma^{-1}\eta, \quad \eta\tau^{-1} = \tau\eta,$$

entonces vemos que $\eta\tau\sigma\eta^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$, la cual permuta la mitad de los lados de cada cara de manera cíclica (similar a lo que hacía $\tau\sigma$, pero ahora siguiendo la orientación positiva de cada cara). Esto nos permite construir un elemento $f \in \text{Aut}(X, D)$ de manera que $\theta(f) = \eta$.

Notemos que θ resulta ser un homomorfismo de grupos y $\theta(\text{Aut}(X, D)) = \theta(\text{Aut}(X, D, Q))$.

Ejemplo 50. — Consideremos el dessin d'enfant de género cero como se muestra en la Figura 7.11. Allí se muestra un automorfismo f de orden 2. Con la enumeración dada, tenemos

$$\sigma = (1, 2, 3)(4, 5)(6, 7), \quad \tau = (1)(2, 4, 7)(3)(5, 6)$$

$$\tau\sigma = (1, 2, 5, 7, 3)(4, 6)$$

$$\eta = \theta(f) = (1, 3)(2)(4, 7)(5, 6)$$

La permutación η tiene orden 2 y satisface las identidades

$$\eta\sigma\eta = \sigma^{-1}, \quad \eta\tau\eta = \tau^{-1}.$$

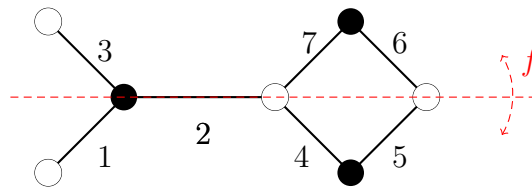


FIGURA 7.11. Un dessin d'enfant de género zero

7.12. Uniformización de dessins d'enfants

Sea (X, D) un dessin d'enfant, de signatura $(g; r, s, t)$, y sea $Q : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ un cubrimiento ramificado asociado.

Consideremos el grupo triangular

$$G(r, s, t) = \langle x, y : x^r = y^s = (yx)^t = 1 \rangle$$

y el homomorfismo de monodromía

$$\Theta_{(X,D)} : G(r, s, t) \rightarrow G(X, D)$$

definido por la regla

$$\Theta_{(X,D)}(x) = \sigma, \quad \Theta_{(X,D)}(y) = \tau,$$

y tomemos

$$\Gamma_j = \Theta_{(X,D)}^{-1}(G(X, D)(j)), \quad G(X, D)(j) = \{\eta \in G(X, D) : \eta(j) = j\}.$$

Sea

$$\mathbb{U} = \begin{cases} \mathbb{H}^2, & \text{if } r^{-1} + s^{-1} + t^{-1} < 1 \\ \mathbb{C}, & \text{if } r^{-1} + s^{-1} + t^{-1} = 1 \\ \widehat{\mathbb{C}}, & \text{if } r^{-1} + s^{-1} + t^{-1} > 1 \end{cases}$$

El grupo $G(r, s, t)$ es un grupo Kleiniano de isometrías de \mathbb{U} y $\mathbb{U}/G(r, s, t)$ la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ con tres puntos cónicos, que podemos asumir sean $0, 1$ y ∞ , cuyos ordenes son r, s y t , respectivamente.

Consideremos un cubriente holomorfo ramificado $\pi_{G(r,s,t)} : \mathbb{U} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, cuyo grupo deck es $G(r, s, t)$, cuyos valores de ramificación son 0 (de orden r), 1 (de orden s) y ∞ (de orden t).

La orbifold de Riemann \mathbb{U}/Γ_j tiene una estructura de superficie de Riemann S_j , topológicamente equivalente a X .

Denotemos por $\pi_{\Gamma_j} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}/\Gamma_j$ el cubrimiento holomorfo ramificado regular con grupo deck Γ_j .

Tenemos entonces un cubrimiento ramificado $\beta_j : \mathbb{U}/\Gamma_j \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de manera que $\pi_{G(r,s,t)} = \beta_j \circ \pi_{\Gamma_j}$.

El par (S_j, β_j) es un par de Belyi cuyo dessin d'enfant (obtenido como preimágen del intervalo $[0, 1]$) es isomorfo a (X, D) .

7.13. Dessins d'enfants reales

Un dessin d'enfant (X, D) es llamado un *dessin d'enfant real* si existe un cubrimiento ramificado asociado $Q : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ admitiendo $T \in \text{Aut}(X, D, Q) - \text{Aut}^+(X, D, Q)$, $T^2 = I$. Decimos que T es una *simetría* de (X, D) .

Proposición 7.13.1. — *La definición anterior no depende del cubrimiento ramificado asociado.*

Demonstración. — Supongamos que tenemos otro cubrimiento ramificado $Q_1 : X \rightarrow \widehat{\mathbb{Q}}$ asociado a (X, D) . Sabemos que existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ (homotópico a la identidad relativo los vértices de D) tal que $Q = Q_1 \circ h$. Luego, $T_1 = h \circ T \circ h^{-1} : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo que revierte la orientación, de orden 2 tal que

$$Q_1 \circ T_1 = Q_1 \circ h \circ T \circ h^{-1} = Q \circ T \circ h^{-1} = J \circ Q \circ h^{-1} = J \circ Q_1,$$

es decir, $T_1 \in \text{Aut}(X, D, Q_1) - \text{Aut}^+(X, D, Q_1)$, $T_1^2 = I$. \square

Supongamos que (X, D) es un dessin d'enfant real, con simetría T (respecto al cubrimiento ramificado asociado Q). Recordemos que, al levantar la estructura de superficie de Riemann de $\widehat{\mathbb{C}}$ a X , por medio de Q , obtenemos una estructura de superficie de Riemann S tal que $Q : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es una función de Belyi y (S, Q) es un par de Belyi, luego, definible sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Además, la simetría T define una simetría de S , es decir un automorfismo anti-holomorfo de S de orden 2. Luego, el par de Belyi (S, Q) es también definible sobre \mathbb{R} .

Teorema 7.13.2 (Köck-Singerman [22] and Köck-Lau [23])

Sea (X, D) un dessin d'enfant real. Entonces, existe un par de Belyi (S, β) equivalente a (X, D) donde S y β están definidas simultáneamente sobre $\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$.

Es claro que el recíproco al resultado anterior es válido. Consideremos un par de Belyi (S, β) , definido sobre $\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$. Tomando $J(z) = \bar{z}$ y $\hat{J}([z_0 : \cdots : z_n]) = [\bar{z}_0 : \cdots : \bar{z}_n]$, entonces $\hat{J}(S) = S$ y $J \circ \beta = \beta \circ \hat{J}$. En particular, el dessin d'enfant definido por (S, β) es real.

Pregunta 1. — ¿Cómo saber si un dessin d'enfant dado es real ?

Para intentar dar una respuesta a la pregunta anterior, procedemos de la siguiente manera. Fijamos un cubrimiento ramificado asociado al dessin d'enfant (X, D) , digamos $Q : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Hacemos una enumeración de los ejes de D y consideramos el respectivo grupo de monodromía $\langle \sigma, \tau \rangle < \mathfrak{S}_e$, donde e es el número de ejes de D .

Sabemos que cada elemento $F \in \text{Aut}(X, D, Q) - \text{Aut}^+(X, D, Q)$ induce una permutación $\eta_F \in \mathfrak{S}_e$ tal que

$$\eta_F \sigma \eta_F^{-1} = \sigma^{-1}, \quad \eta_F \tau \eta_F^{-1} = \tau^{-1}.$$

También sabemos que cada permutación $\eta \in \mathfrak{S}_e$ tal que $\eta \sigma \eta^{-1} = \sigma^{-1}$ and $\eta \tau \eta^{-1} = \tau^{-1}$ proviene de algún $F \in \text{Aut}(X, D, Q) - \text{Aut}^+(X, D, Q)$.

Lo anterior permite dar la siguiente respuesta a nuestra pregunta anterior.

Teorema 7.13.3. — *Un dessin d'enfant (X, D) es real si sólo si existe $\eta \in \mathfrak{S}_e$ de orden 2 tal que $\eta \sigma \eta^{-1} = \sigma^{-1}$, $\eta \tau \eta^{-1} = \tau^{-1}$.*

7.14. Ejemplos de dessins d'enfants de género cero

En esta sección veremos algunos ejemplos de dessins d'enfants de género cero. En este caso, la valencia de un tal dessin d'enfant $(\widehat{\mathbb{C}}, D)$ es de la forma

$$(a_1, \dots, a_\alpha; b_1, \dots, b_\beta; c_1, \dots, c_\gamma)$$

donde

1. α es el número de vértices negros ;
2. β es el número de vértices blancos ;
3. γ es el número de caras ;
4. $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_\alpha$ son los grados de los vértices negros ;
5. $1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_\beta$ son los grados de los vértices blancos ;
6. $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_\gamma$ son los grados de las caras ;

de manera que

$$\begin{aligned} a_1 + \dots + a_\alpha &= b_1 + \dots + b_\beta = c_1 + \dots + c_\gamma = e, \\ 2 &= \alpha + \beta + \gamma - (a_1 + \dots + a_\alpha). \end{aligned}$$

Sabemos que existe una función de Belyi $\beta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de manera que el dessin d'enfant (X, D) es isomorfo al dessin d'enfant definido por $\beta^{-1}([0, 1])$. En este caso, β es una función racional. Si :

1. p_1, \dots, p_α son los ceros de β (donde p_j corresponde al vértice negro con grado a_j);
2. q_1, \dots, q_β son los ceros de $\beta - 1$ (donde q_j corresponde al vértice blanco con grado b_j); y
3. t_1, \dots, t_γ son los polos de β (donde t_j corresponde a la cara con grado c_j);

entonces

$$\beta(z) = k \frac{(z - p_1)^{a_1} \cdots (z - p_\alpha)^{a_\alpha}}{(z - t_1)^{c_1} \cdots (z - t_\gamma)^{c_\gamma}}$$

$$\beta(z) - 1 = \mu \frac{(z - q_1)^{b_1} \cdots (z - q_\beta)^{b_\beta}}{(z - t_1)^{c_1} \cdots (z - t_\gamma)^{c_\gamma}}$$

donde $k, \mu \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Si T es una transformación de Möbius, entonces $\beta \circ T$ también nos entrega una función de Belyi asociada al mismo dessin d'enfant. Esto nos permite asumir algunos de los puntos p_j, q_j y t_j ser $\infty, 0$ y 1 . Luego, en vez de considerar las $\alpha + \beta + \gamma + 2$ parámetros involucrados, sólo tendríamos $\alpha + \beta + \gamma - 1$ a encontrar.

En general, el cálculo explícito de β es computacionalmente muy pesado. En esta sección veremos algunos ejemplos para el caso de dessins d'enfants de género cero.

Ejemplo 51. — Módulo isomorfía, sólo hay un dessin d'enfant con valencia $(4; 1, 1, 1, 1; 4)$; es la mostrada en la Figura 7.12. En particular, este dessin d'enfant es punto fijo de cada $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, es decir, es definible sobre \mathbb{Q} . Queremos encontrar una función racional $\beta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $\beta^{-1}([0, 1])$ sea tal dessin d'enfant. Como hemos dicho antes, podemos asumir que el vértice negro es 0 , que la única pre-imagen de ∞ es ∞ (hay sólo una cara) y que uno de los vértices blancos es 1 . Denotemos los otros tres vértices blancos como a, b y c (a determinar). De esta manera

$$\beta(z) = kz^4,$$

$$\beta(z) - 1 = \mu(z - 1)(z - a)(z - b)(z - c).$$

Usando las igualdades anteriores, podemos ver que $k = \mu$ y tomando $z = 1$ que $k = 1$, es decir, $\beta(z) = z^4$; en particular, $a = i$, $b = -1$ y $c = -i$.

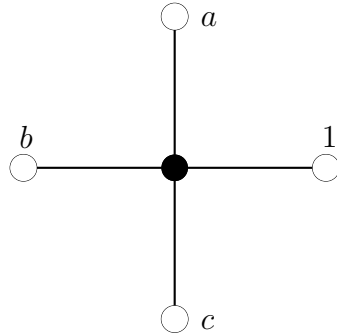


FIGURA 7.12. Dessin d'enfant de género zero y valencia $(4; 1, 1, 1, 1; 4)$

Ejemplo 52. — Módulo isomorfía, sólo hay un dessin d'enfant con valencia $(1, 1, 4; 1, 1, 2, 2; 6)$; es la mostrada en la Figura 7.13. En particular, este dessin d'enfant es punto fijo de cada $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, es decir, es definible sobre \mathbb{Q} . Queremos encontrar una función racional $\beta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $\beta^{-1}([0, 1])$ sea tal dessin d'enfant. Podemos asumir que dos vértices negros son 0 y 1 (ver Figura 7.13). El otro vértice negro es a y los vértices blancos son b, c, d y e , y que la única pre-imagen de ∞ es ∞ (hay sólo una cara). De esta manera

$$\beta(z) = kz^4(z-1)(z-a),$$

$$\beta(z) - 1 = \mu(z-b)^2(z-c)^2(z-d)(z-e).$$

Usando las igualdades anteriores, podemos ver que $k = \mu$.

Tenemos además 6 ecuaciones en las 6 incógnitas k, a, b, c, d y e . Una de esas ecuaciones es

$$1 + a - 2b - 2c - d - e = 0.$$

Las otras ecuaciones quedan un poco más complicadas. Ya en este ejemplo podemos ver lo pesado que puede ser buscar β de manera explícita.

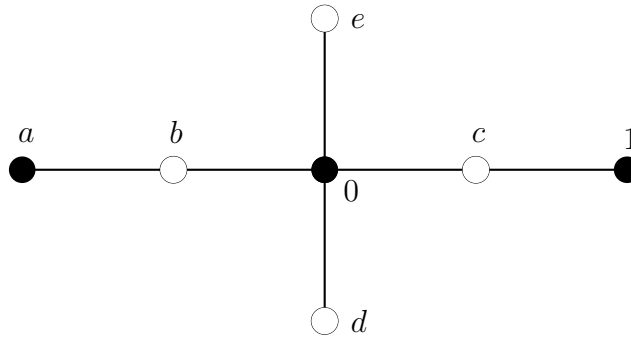


FIGURA 7.13. Dessin d'enfant de género zero y valencia $(1, 1, 4; 1, 1, 2, 2; 6)$

Ejemplo 53. — Usando la valencia $(1, 1, 1, 2, 3, 8; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4; 16)$ obtenemos el dessin d'enfant mostrado en la Figura 7.14. En este caso, el intentar calcular explícitamente β es muy complicado !!

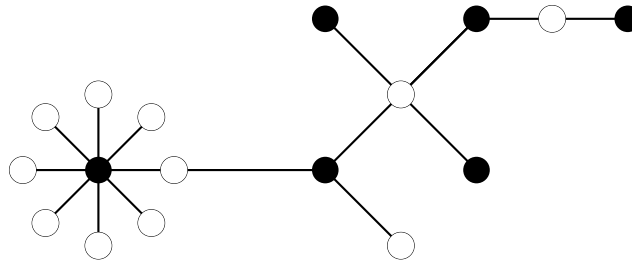


FIGURA 7.14. Dessin d'enfant con valencia $(1, 1, 1, 2, 3, 8; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4; 16)$

Ejemplo 54. — Consideremos el dessin d'enfant de género zero y valencia $(3; 1, 2; 1, 2)$ como se muestra en la Figura 7.15. En este caso, para buscar β , podemos asumir que un vértice blanco es 1, los vértices de centro de cara son 0 y ∞ , el vértice negro es a y el otro vértice blanco es b . En este caso

$$\beta(z) = \frac{k(z - a)^3}{z}$$

$$\beta(z) - 1 = \frac{\mu(z - 1)(z - b)^2}{z}.$$

Igualando las anteriores nos dan que $\mu = k$ y

$$k(z - 1)(z - b)^2 = -1 + k(z - a)^3.$$

Igualando coeficientes obtenemos que

$$k = \frac{64}{27}, \quad b = \frac{-1}{8}, \quad a = \frac{1}{4}$$

es decir,

$$\beta(z) = \frac{(4z - 1)^3}{27z},$$

de donde vemos directamente que este dessin d'enfant es definible sobre \mathbb{Q} .

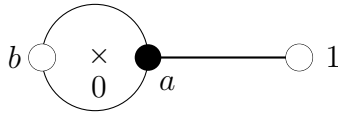


FIGURA 7.15. Dessin d'enfant de género zero y valencia $(3; 1, 2; 1, 2)$

Ejemplo 55. — Módulo isomorfía, sólo hay dos dessins d'enfants con valencia $(1, 1, 4; 1, 1, 2, 2; 6)$ como se muestran en la Figura 7.16.

En el caso del dessin d'enfant D_1 , tenemos que su grupo de monodromía (con el enumerado dado) es $G_1 = \langle \sigma_1, \tau_1 \rangle < \mathfrak{S}_5$, donde

$$\sigma_1 = (1, 2, 3, 4)(5)(6), \quad \tau_1 = (1, 5)(3, 6)(2)(4)$$

de donde se puede ver que $|G_1| = 48$.

En el caso del dessin d'enfant D_2 , tenemos que su grupo de monodromía (con el enumerado dado) es $G_2 = \langle \sigma_2, \tau_2 \rangle < \mathfrak{S}_5$, donde

$$\sigma_2 = (1, 2, 3, 4)(5)(6), \quad \tau_2 = (1, 5)(2, 6)(3)(4)$$

de donde se puede ver que $|G_2| = 120$, es decir, $G_2 = \mathfrak{S}_5$.

En particular, vemos que D_1 y D_2 no pueden estar en la misma órbita por la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, es decir, ambos dessins d'enfants son definibles sobre \mathbb{Q} .

Ejemplo 56. — Módulo isomorfía, sólo hay dos dessins d'enfants con valencia $(1, 1, 1, 1, 4; 5, 5, 5, 6, 6; 27)$ como se muestran en la Figura 7.17.

En el caso del dessin d'enfant D_1 , tenemos que su grupo de monodromía (con una enumeración adecuada) es $G_1 = \langle \sigma_1, \tau_1 \rangle < \mathfrak{S}_5$, donde

$$\sigma_1 = (1, 2, 3, 4, 5),$$

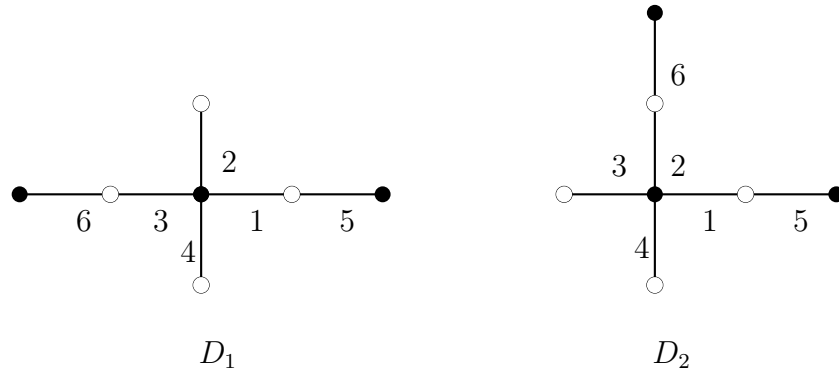


FIGURA 7.16. Dessins d'enfants de género zero y valencia $(1, 1, 4; 1, 1, 2, 2; 6)$

$\tau_1 = (1, 6, 7, 8, 9)(2, 10, 11, 12, 13, 14)(3, 15, 16, 17, 18)(4, 19, 20, 21, 22)$
de donde se puede ver que $G_1 = \mathcal{A}_{27}$.

En el caso del dessin d'enfant D_2 , tenemos que su grupo de monodromía (con el enumerado dado) es $G_2 = \langle \sigma_2, \tau_2 \rangle < \mathfrak{S}_5$, donde

$$\sigma_2 = (1, 2, 3, 4, 5),$$

$$\tau_2 = (1, 6, 7, 8, 9)(2, 10, 11, 12, 13)(3, 14, 15, 16, 17, 18) \\ (4, 19, 20, 21, 22, 23)(5, 24, 25, 26, 27)$$

de donde se puede ver que $G_2 = \mathcal{A}_{27}$.

Se sabe que estos dos dessins d'enfants no están en la misma órbita por el grupo $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$; luego cada uno de ellos es definible sobre \mathbb{Q} .

7.15. Funciones de Belyi de género cero y dinámica racional

Consideremos una función racional $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. La órbita de un punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ es dada por

$$\{z, R(z), R^2(z), \dots\}.$$

El conjunto de Fatou de R es el abierto $F(R) \subset \widehat{\mathbb{C}}$ donde la familia de iteradas de R es normal; su complemento, $J(R)$, es el conjunto de Julia de R .

La función racional R es llamada caótica si $J(R) = \widehat{\mathbb{C}}$.

Un punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ es llamado un punto periódico de R si existe un entero $n \geq 1$ tal que $R^n(z) = z$ (en caso que n se puede escoger como 1, entonces

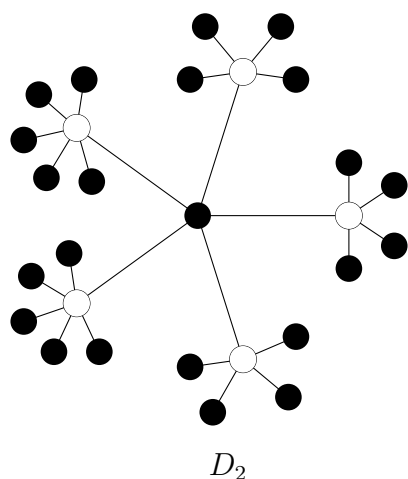
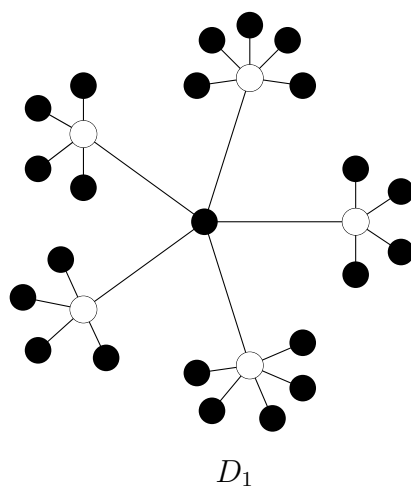


FIGURA 7.17. Dessins d'enfants de género zero y valencia $(1, 2^2, 1, 4; 5, 5, 5, 6, 6; 27)$

z es llamado un *punto fijo* de R). Diremos que z es un *punto pre-periódico* de R si existe un entero $n \geq 1$ tal que $R^n(z)$ es periódico.

Teorema 7.15.1 (Sullivan). — *Una función racional R , de grado $d \geq 2$, es caótica si sus puntos críticos son pre-periódicos, pero no periódicos.*

Un ejemplo de tal tipo de funciones racionales fue dada por Sullivan, esta es

$$R(z) = \left(\frac{z-2}{z} \right)^2,$$

cuyos puntos críticos son 0 y 2. En este caso

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{R} & \infty & \xrightarrow{R} & 1 & \xrightarrow{R} & \infty \\ 2 & \xrightarrow{R} & 0 & \xrightarrow{R} & \infty & \xrightarrow{R} & 1 & \xrightarrow{R} & \infty \end{array}$$

Notemos que R es una función de Belyi asociado al dessin d'enfant mostrado en la Figura 7.18 que tiene la propiedad que sus valores críticos ∞ , 0 y 1 son vértices (blancos y/o negros) y centros de cara (polos).

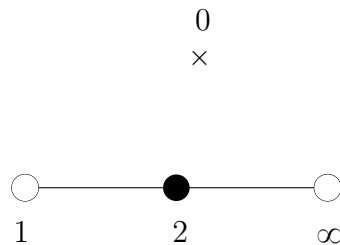


FIGURA 7.18. Dessin d'enfant de género zero y valencia $(2; 1, 1; 2)$

Otros ejemplos de funciones caóticas se pueden construir usando dessins d'enfants de género 0. Para hacer esto, consideramos funciones de Belyi $\beta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ con la propiedad que

$$\{\beta(\infty), \beta(0), \beta(1)\} = \{\infty, 0, 1\}.$$

Este tipo de funciones de Belyi son llamadas *funciones de Belyi dinámicas*. Con esta propiedad, tenemos que cada iterada de β sigue siendo una función de Belyi.

Sea β entonces una función de Belyi dinámica. Esto lo podemos identificar en el dessin d'enfant diciendo que los puntos ∞ , 0 y 1 están contenidos en los vértices (negros y blancos) y centros de caras. Recordemos que (pre-componiendo con una transformación de Móbius) esto siempre lo podemos asumir.

Ahora, como los puntos críticos de la función de Belyi son aquellos vértices negros y blancos y centros de cara, que tengan grado al menos 2, podemos ver en el dessin d'enfant la condición que los puntos críticos sean pre-periódicos y no periódicos.

Por ejemplo, supongamos que tenemos un dessin d'enfant de género cero donde hay dos vértices blancos v_1 y v_2 , ambos de grado 1. Entonces,

si colocamos $v_1 = 1$, $v_2 = \infty$ y un centro de cara siendo 0, vemos que 1 y ∞ no son puntos críticos (pero 0 si lo puede ser). En tal caso, tenemos :

1. si v_\bullet es un vértice negro, entonces su órbita es de la forma

$$v_\bullet \xrightarrow{\beta} 0 \xrightarrow{\beta} \infty \xrightarrow{\beta} 1 \xrightarrow{\beta} \circlearrowleft$$

2. si v_\circ es un vértice blanco, entonces su órbita es de la forma

$$v_\circ \xrightarrow{\beta} 1 \xrightarrow{\beta} \circlearrowleft$$

3. si v_\star es un centro de cara, entonces su órbita es de la forma

$$v_\star \xrightarrow{\beta} \infty \xrightarrow{\beta} 1 \xrightarrow{\beta} \circlearrowleft$$

REFERENCIAS

- [1] G. V. Belyi. On Galois extensions of a maximal cyclotomic field. *Mathematics of the USSR-Izvestiya* **14** No.2 (1980), 247–256.
- [2] G. Cardona and J. Quer. Field of moduli and field of definition for curves of genus 2. In : Shaska, T. (ed.) Computational aspects of algebraic curves, *Lecture Notes Series on Computing* **13** (2005), 71–83.
- [3] P. B. Cohen, C. Itzykson and J. Wolfart. Fuchsian triangle groups and Grothendieck dessins. Variations on a theme of Belyi. *Comm. Math. Phys.* **163** (1994), 605–627.
- [4] M. D. E. Conder, G. A. Jones, M. Streit and J. Wolfart. Galois actions on regular dessins of small genera. *Revista Matemática Iberoamericana* No.1 **29** (2013), 163–181.
- [5] K. Coombes and D. Harbater. Hurwitz families and arithmetic Galois groups. *Duke Math. J.* **52** (1985), 821–839.
- [6] R. Cori and A. Machi. Maps, hypermaps and their automorphisms : a survey I, II, III. *Expositiones Math.* **10** (1992), 403–427 ; 429–447 ; 449–467.
- [7] J. M. Couveignes. Calcul et rationalité de fonctions de Belyi en genre 0. *Annales de l'Institut Fourier* **44** (1994).
- [8] P. Dèbes and M. Emsalem. On fields of moduli of curves. *J. Algebra* **211** (1999), 42–56.
- [9] C. J. Earle. On the moduli of closed Riemann surfaces with symmetries. *Advances in the Theory of Riemann Surfaces* (1971), 119–130. Ed. L.V. Ahlfors et al. (Princeton Univ. Press, Princeton).

- [10] M. Emsalem and P. Lochak. The action of the absolute Galois group on the moduli space of spheres with four marked points. In L. Schneps and P. Lochak (eds.), *The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants. London Math. Soc. Lect. Notes Ser.* **200**. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, 307–321.
- [11] The GAP Group. GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Version 4.4.12 ; 2008 (<http://www.gap-systems.org>)
- [12] E. Gironde and G. González-Diez. *Introduction to compact Riemann surfaces and dessins d'enfants*. London Mathematical Society Student Texts **79**. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [13] E. Gironde and G. González-Diez. A note on the action of the absolute Galois group on dessins. *Bull. London Math. Soc.* **39** No. 5 (2007), 721–723.
- [14] A. Grothendieck. Esquisse d'un Programme (1984). In Geometric Galois Actions. In L. Schneps and P. Lochak (eds.), *London Math. Soc. Lect. Notes Ser.* **242**. Cambridge University Press, Cambridge, 1997, 5–47.
- [15] W. R. Hamilton. Letter to John T. Graves “On the Icosian” (17th October 1856). In *Mathematical papers* Vol. **III**, Algebra (eds. H. Halberstam and R.E. Ingram). Cambridge University Press, Cambridge, 1967, pp. 612–625.
- [16] R. A. Hidalgo. Non-hyperelliptic Riemann surfaces with real field of moduli but not definable over the reals. *Archiv der Mathematik* **93** (2009), 219–222.
- [17] R. A. Hidalgo and P. Johnson. Field of Moduli of Generalized Fermat Curves of type $(k, 3)$ with an application to non-hyperelliptic dessins d'enfants. *Journal of Symbolic Computation* **77** (2015) 60–72.
- [18] B. Huggins. *Fields of moduli of hyperelliptic curves*, Ph.D. Thesis, UCLA, 2005.
- [19] B. Huggins. Fields of moduli of hyperelliptic curves. *Math. Res. Lett.* **14** (2007), 249–262.
- [20] G. A. Jones and M. Streit. Galois groups, Monodromy Groups and Cartographic Groups. In Geometric Galois Actions. 2. The inverse

- Galois Problem, Moduli Spaces and Mapping Class Groups. L. Schneps and P. Lochak eds., *London Math. Soc. Lect. Notes Ser.* **243**. Cambridge University Press, Cambridge, 1997, 25–65.
- [21] B. Köck. Belyi’s theorem revisited. *Beitr. Algebra Geom.* **45** No.1 (2004), 253–265.
- [22] B. Köck and D. Singerman. Real Belyi theory. *The Quarterly J. of Math.* **58** (2007), 463–478.
- [23] B. Köck and E. Lau. A note on Belyi’s theorem for Klein surfaces. *The Quarterly J. of Math.* **61** (2010), 103–107.
- [24] S. Koizumi. Fields of moduli for polarized abelian varieties and for curves. *Nagoya Math. J.* **48** (1972), 37–55.
- [25] A. Kontogeorgis. Field of moduli versus field of definition for cyclic covers of the projective line. *J. de Theorie des Nombres de Bordeaux* **21** (2009) 679–692.
- [26] S. K. Lando and A. K. Zvonkin. *Graphs on surfaces and their applications*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences **141** (II). Springer (2004).
- [27] R. Lercier and C. Ritzenthaler. Hyperelliptic curves and their invariants : geometric, arithmetic and algorithmic aspects. *J. Algebra* **372** (2012), 595–636.
- [28] L. Schneps. Dessins d’enfants on the Riemann sphere. In The Grothendieck theory of dessins d’enfants. Edited by Leila Schneps. *London Math. Soc. Lect. Notes Ser.* **200**. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, 47–77.
- [29] G. Shimura. On the field of rationality for an abelian variety. *Nagoya Math. J.* **45** (1972), 167–178.
- [30] A. Weil. The field of definition of a variety. *Amer. J. Math.* **78** (1956), 509–524.
- [31] J. Wolfart. The Obvious part of Belyi’s theorem and Riemann surfaces with many automorphisms. In Geometric Galois actions, Vol. 1, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **242**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 97–112 (1997).

INDICE

- Atlas analítico, 9
- Atlas topológico, 7
- Automorfismo anti-holomorfo, 22
- Automorfismo anti-holomorfo de un par de Belyi, 39
- Automorfismo de un dessin d'enfant, 56
- Automorfismo holomorfo, 21
- Automorfismo holomorfo de un par de Belyi, 39
- Cartas, 7
- Conjunto de fatou, 78
- Conjunto de Julia, 78
- Cubrimiento ramificado asociado a un dessin d'enfant, 55
- Cuerpo de definición, 25
- Cuerpo de funciones meromorfas, 15
- Cuerpo de módulos, 25
- Cuerpo de módulos de un par de Belyi, 40
- Curva p -gonal, 11
- Curva algebraica suave, 10
- Curva de Belyi, 35
- Curva de Fermat, 11, 12
- Curva generalizada de Fermat, 12, 13
- Curvas de Hurwitz, 24
- Dessin d'enfant, 53
- Dessin d'enfant limpio, 54
- Dessin d'enfant real, 72
- Dessins d'enfants isomorfos, 56
- Divisor, 15
- Divisor efectivo, 15
- Esfera de Riemann, 10
- Función \wp de Weierstrass, 18
- Función analítica, 13
- Función anti-analítica, 14
- Función anti-holomorfa, 14
- Función biholomorfa, 14
- Función de Belyi, 35
- Función holomorfa, 13
- Función meromorfa, 14
- Función racional caótica, 78
- Funciones de Belyi dinámicas, 80
- Funciones de transición, 7
- Grado de un divisor, 15
- Grupo de monodromía de un dessin d'enfant, 62
- Grupo Fuchsiano, 46
- Grupo Kleiniano, 43
- Grupo reducido de automorfismos, 29
- Grupos discontinuos, 43
- isomorfismo entre dessins d'enfants, 56
- Multiplicidad, 13
- Orbifold de Riemann, 49
- Par de Belyi, 35
- Par de Belyi real, 39
- Par de Belyi regular, 39
- Plano hiperbólico, 47
- Polígono fundamental, 47
- Polinomios de Tchebyshev, 35
- Punto fijo de una función racional, 79
- Punto periódico de una función racional, 78

- Punto pre-periódico de una función racional, 79
- Rectas hiperbólicas, 47
- región de discontinuidad, 43
- Signatura de un dessin d'enfant, 53
- Simetría de un dessin d'enfant, 72
- Simetrías, 31
- Superficie de Riemann, 9
- Superficie de Riemann hiperbólica, 46
- Superficie de Riemann hiperelíptica, 11
- Superficie de Riemann real, 31
- Superficie de Riemann simétrica, 31
- Superficies biholomórficamente equivalentes, 14
- Superficies isomorfas, 14
- Superficies topológicas, 7
- Valencia de un dessin d'enfant, 55
- variedad diferenciable, 8
- Variedad topológica, 7